

Mécanique des fluides : première partie

Olivier LOUISNARD

17 décembre 2008

Cette création est mise à disposition selon le Contrat Paternité-Pas d'Utilisation
Commerciale-Pas de Modification 2.0 France disponible en ligne
[http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/) ou par courrier postal à
Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105,
USA.



Sommaire

Introduction	3
1 Description d'un fluide	7
1.1 Qu'est-ce qu'un fluide ?	7
1.2 Propriétés.	8
1.3 Description comme un milieu continu.	8
1.3.1 Séparation des échelles	8
1.3.2 Définition de la masse volumique	10
1.3.3 Vitesse et quantité de mouvement	12
1.3.4 Grandeurs énergétiques	13
1.4 Grandeurs locales et globales	13
1.5 Volume fixe ou mobile ?	14
2 Introduction aux bilans	17
2.1 Introduction intuitive	17
2.2 Transport diffusif et convectif	19
2.2.1 Qu'est ce qu'un flux ?	19
2.2.2 Transport diffusif (parenthèse)	20
2.2.3 Flux convectif	21
2.3 Bilan d'une grandeur volumique dans un milieu continu	25
2.3.1 Écriture générale	25

2.3.2	Une géométrie particulière : le tube de courant	26
2.3.3	Une approximation utile : l'écoulement piston	27
2.4	Équations de conservation pour un fluide	31
2.4.1	Conservation de la masse	31
2.4.2	Conservation de la quantité de mouvement	31
2.4.3	Conservation de l'énergie	32
2.4.4	Synthèse	33
3	Forces exercées sur un fluide	35
3.1	Introduction	35
3.2	Force volumiques	35
3.3	Forces de contact : pression	36
3.3.1	Origine microscopique.	36
3.3.2	Equilibre d'une colonne d'eau.	38
3.3.3	Généralisation.	40
3.3.4	Loi de l'hydrostatique.	41
3.3.5	Applications.	42
3.3.6	Extension en référentiel non galiléen.	43
3.3.7	Poussée d'Archimède.	44
3.3.8	Moment des forces de pression.	46
3.4	Forces de contact : frottement visqueux.	46
3.4.1	Mise en évidence : expérience de Couette.	46
3.4.2	La viscosité.	47
3.4.3	Origine microscopique.	48
3.4.4	Le nombre de Reynolds.	48
3.4.5	Le modèle de fluide parfait.	50

3.5	Écriture tensorielle des forces de contact	52
4	Equations du mouvement d'un fluide	55
4.1	Sous forme de bilans volumiques	55
4.1.1	Conservation de la masse.	55
4.1.2	Conservation de la quantité de mouvement.	56
4.1.3	Conservation de l'énergie.	58
4.1.4	Complément : théorème de l'énergie cinétique.	59
4.2	Conditions aux limites.	60
4.3	Application aux écoulements en tuyauterie.	61
4.3.1	Preliminaire.	61
4.3.2	Conservation de la masse.	62
4.3.3	Conservation de la quantité de mouvement.	63
4.3.4	Conservation de l'énergie.	64
4.3.5	Théorème de l'énergie cinétique.	67
4.4	Équations locales.	69
4.4.1	Contexte	69
4.4.2	Obtention	69
4.4.3	Un jeu d'équations complet ?	71
4.4.4	Cas du fluide incompressible	72
5	Mouvement du fluide parfait incompressible	75
5.1	Rappel des hypothèses et équations	75
5.2	Formule de Bernoulli	76
5.2.1	Hypothèses-Enoncé	76
5.2.2	Démonstration	77
5.2.3	Commentaires	77

5.3	Applications	78
5.3.1	Problèmes de vidange	78
5.3.2	Pression dynamique. Forces sur un obstacle.	79
5.3.3	Notion de charge	81
5.4	Pertes et gains de charge	83
5.4.1	Formule de Bernoulli généralisée	83
5.4.2	Frottement visqueux : $\Phi_v \neq 0$	85
5.4.3	Cas des machines tournantes : $\dot{W}_u \neq 0$	88
5.4.4	Applications aux réseaux de fluide	89
6	Fluides visqueux	93
6.1	Introduction	93
6.2	Le modèle de fluide newtonien	93
6.2.1	Approche par l'expérience de Couette	93
6.2.2	Equations du modèle newtonien	95
6.3	Equations de Navier-Stokes	95
6.3.1	Adimensionnalisation	96
6.3.2	Classification des écoulements	97
6.4	Ecoulements visqueux classiques	98
6.4.1	Ecoulement de Couette	98
6.4.2	Ecoulement de Poiseuille	100
6.4.3	Ecoulements unidirectionnels.	103
7	Ecoulements rampants	105
7.1	Equations	105
8	Couche limite	107

A	Puissance du poids et premier principe	109
B	Quelques formules d'analyse vectorielle	111
B.1	Formules de Green et Ostrogradski	111
B.2	Dérivation de produits	112
B.3	Dérivée particulière	112
C	Rappel sur les forces d'inertie	114
C.1	Rappel : composition des accélérations	114
C.2	Forces d'inertie	115
D	Démonstration du théorème de l'énergie cinétique	116
E	Diverses formes de l'équation de conservation de l'énergie	118

Introduction

La mécanique des fluides est une discipline ancienne, d'applications très variées et encore en pleine évolution. Il convient de toujours garder à l'esprit que l'évolution de cette discipline a eu deux moteurs, fortement imbriqués :

- l'explication des phénomènes naturels : les vagues, le vent, la force de résistance sur un corps en mouvement dans l'air ou l'eau, l'aspiration d'une cheminée, le mouvement des bulles, la chute d'objets léger (les feuilles des arbres), les vibrations provoquées par un écoulement. . .
- l'exploitation des fluides à des fins pratiques : fabrication d'embarcations, pompage de puits, adduction d'eau, application "énergétiques" (moulins à eau ou à vent) . . .

La mécanique des fluides a cet avantage qu'elle fait partie de notre quotidien, et il est toujours bon d'appréhender un écoulement de fluide tout d'abord avec sa seule intuition. Les équations de la mécanique des fluides ont une structure mathématique complexe, et doivent être vues comme un ultime recours pour décrire ou quantifier un phénomène, là où l'intuition s'arrête. Elles ne *sont* pas la mécanique des fluides, elles la décrivent.

A titre de préliminaire à ce cours, on pourra par exemple se poser les questions suivantes :

- pourquoi les portes claquent dans un courant d'air ?
- pourquoi les bulles remontent dans l'eau ?
- pourquoi un avion ne tombe-t'il pas sous son propre poids ?
- comment faire monter un fluide d'un point bas à un point haut ?
- la quantité d'eau sortant d'un tuyau par unité de temps est-elle égale à celle qui y rentre ?
- l'eau sortant d'un robinet a-t-elle la même allure selon la valeur du débit ?
- que faut-il faire pour siphonner un récipient ?
- comment fonctionne une centrale hydroélectrique ?

Toutes ces questions sont généralement posées plutôt par les enfants, parce qu'ils cherchent à comprendre le monde qui les entoure. Avec l'âge, la tendance intellectuelle naturelle est plutôt à l'acceptation du phénomène. Il est donc important de questionner à nouveau sa perception des phénomènes physiques avant de vouloir les modéliser. Complétez donc cette liste de questions par les vôtres en continuant à

étudier ce cours. Le cadre forcément restreint de ce dernier ne permettra pas malheureusement de répondre à toutes, mais cette démarche intellectuelle est importante. Pensez également que les scientifiques qui ont établi les équations de la mécanique des fluides sont allés de l'intuitif vers le modèle mathématique, et non pas l'inverse.

Quelques conseils de lecture de ce polycopié :

- le **chapitre 1** décrit ce qu'est un fluide et comment on peut le définir par un milieu continu. Sa lecture, bien que conseillée, n'est pas indispensable pour comprendre les chapitres suivants.
- le **chapitre 2** décrit ce qu'est une équation de bilan et définit mathématiquement le terme de flux convectif. On pourra éventuellement survoler ce chapitre à l'usage du débutant, et ne retenir que son résultat essentiel (2.6). On y définit également ce volume particulier qu'est le tube de courant. On y expose, ensuite, les équations de conservation pour un fluide sans détailler les forces exercées, et les trois équations de bilan fondamentales pour un fluide sont retrouvées : la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. Ce n'est finalement qu'un rappel des grands principes de la physique. **Sa lecture est indispensable.**
- Le **chapitre 3** peut être lu indifféremment avant ou après les trois précédents. Il décrit les forces de volume et de contact exercées sur un fluide. On y déduit les lois de l'hydrostatique. La notion de force de frottement visqueuse y est présentée et le nombre de Reynolds introduit. **Sa lecture est indispensable.**
- Le **chapitre 4** est le coeur de ce document : sur la base des chapitres 2 et 3, les équations du mouvement d'un fluide sont présentées, sous forme globale, dans le cas particulier d'une machine fluide, et enfin sous forme locale. Aucune hypothèse restrictive n'y est effectuée de telle sorte que les équations présentées sont applicables à tout type de fluide ou d'écoulement. L'hypothèse incompressible y est discutée. **Lecture indispensable.**
- Le **chapitre 5** présente le modèle du fluide parfait uniquement dans le cas incompressible. La formule de Bernoulli y est présentée, ainsi que la notion de charge. Les limites de cette formule et du modèle de fluide parfait sont également présentées, ainsi que les différents cas de gains ou pertes de charge dans un écoulement en tuyauterie. **Lecture indispensable.**
- Le **chapitre 6** introduit le caractère visqueux des fluides. Le modèle de fluide dit "newtonien" est introduit sur la base de résultats expérimentaux sur l'expérience de Couette. Les équations de Navier-Stokes en sont déduites et adimensionnalisées pour faire apparaître des nombres adimensionnels, en particulier le nombre de Reynolds. On détaille ensuite l'écoulement de Poiseuille, avec les importantes conséquences sur la perte de charge en ligne et les modèles de milieux poreux. **Lecture indispensable.**
- Le **chapitre 7** (en cours d'écriture) traite le cas particulier des écoulements dits "rampants", c'est-à-dire à très faible nombre de Reynolds, avec pour application le calcul de la traînée sur une sphère.

Ce polycopié est inspiré de plusieurs présentations différentes de la mécanique des fluides. Citons tout d'abord le livre passionnant de Guyon et al. (2001) qui est à notre connaissance l'ouvrage le plus exhaustif sur le sujet (et en plus en français!).

Il est notamment le seul à traiter en détail les fluides non-newtoniens et les effets dans des référentiels tournants. Attention, la seconde édition (couverture verte) est bien plus complète que la première (couverture rouge). Une excellente introduction à la turbulence est également proposée.

On pourra consulter l'excellent livre de Chassaing (2000) (chercheur à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse), très complet notamment dans le traitement des couches limites, et d'une rigueur mathématique remarquable .

Le livre de Candel (1995), outre sa présentation irréprochable, traite en détail certaines applications inusuelles (éolienne, fusée, . . .). Il partage avec l'ouvrage de White (1994) et ce polycopié une présentation préférentielle des équations sous forme volumique. Le livre de White (1994) présente par ailleurs un grand nombre de données technologiques, d'applications pratiques et d'exercices originaux. C'est une source d'information incontournable (mais en anglais) pour tout problème pratique.

Chapitre 1

Description d'un fluide

1.1 Qu'est-ce qu'un fluide ?

En relation avec le cours de thermodynamique, nous incluons dans la notion de fluide les liquides et les gaz. On pourrait tout d'abord demander au lecteur, avant d'aller plus loin, de se questionner sur la définition d'un fluide : le sens commun suggère qu'un fluide, en opposition avec un solide qui sait maintenir sa forme tout seul, nécessite un contenant, sans quoi il "coule" (pour un liquide) ou "s'échappe" (pour un gaz).

Concernant les gaz, on sait qu'ils sont constitués d'atomes ou de molécules en mouvement (dit d'agitation thermique) qui s'entrechoquent en permanence. Cette description a été proposée à l'origine par Boltzmann¹, et conduit à la fameuse *théorie cinétique des gaz*. Si le gaz est suffisamment dilué (limite du gaz parfait), les molécules n'interagissent pas autrement que par des chocs élastiques, car elles sont en moyenne suffisamment éloignées les unes des autres pour que les forces électrostatiques soit négligeables.

Les liquides nous sont beaucoup plus familiers que les gaz², mais leur structure est pourtant plus complexe. Ils sont l'intermédiaire entre le solide et le gaz. Le solide

¹Ludwig Boltzmann (1844-1906) : il est le fondateur de la description microscopique des gaz à partir des principes de la mécanique classique. Il fut notamment le premier à donner une interprétation microscopique de l'entropie et de la notion d'irréversibilité. Ses idées audacieuses, qui constituent le fondement de la thermodynamique moderne, furent vivement contestées de son temps, notamment par Mach et Ostwald, pour qui la science doit se baser sur des observations macroscopiques et ne pas faire appel à des entités microscopiques (l'atome) dont l'existence ne peut être observée. Découragé, il écrivit en 1898 : "je suis conscient de n'être qu'un faible individu luttant contre le courant de l'époque". Par ailleurs de tendance dépressive, il commit deux tentatives de suicide, dont la seconde lui fut fatale, en 1906. Il ne connut ainsi jamais les conséquences de sa théorie. La preuve de l'existence de la structure atomique de la matière fut apportée deux ans après sa mort.

²Tout d'abord parce qu'on les "voit", et que, contrairement aux gaz, on ressent immédiatement leur contact avec la peau (signification du mot "mouillé"). L'air est pourtant en permanence en contact avec notre peau et lui applique une force de 1 kg par cm² !

maintient ses atomes fixes, enfermés dans une “cage” constituée par les atomes voisins, à l’exception de vibrations de faible amplitude d’origine thermique. A l’inverse, le gaz contient des atomes ou molécules libres les uns par rapport aux autres, n’interagissant que par des chocs. On retrouve les deux aspects dans un liquide : les molécules sont très peu mobiles, enfermées dans des cages formées par leur voisines, mais ces cages sont temporaires, et, en présence d’une force suffisante, le mouvement relatif des molécules moyen peut devenir non nul. C’est ainsi qu’un liquide s’écoule.

Pour certaines matières, il est parfois difficile de faire la différence entre un comportement liquide et solide. Par exemple le sable peut s’écouler alors qu’il est constitué de particules solides. Pire encore, si l’on tape fortement sur du sable mouillé, on ressent un comportement solide, mais on peut enfoncer lentement sa main dans le sable comme dans un liquide. Les glaciers apparaissent solides à notre échelle, mais s’écoulent sur une échelle de temps de l’ordre du siècle. Certaines pâtes (dont cette fameuse gelée translucide vendue pour amuser les enfants...) apparaissent comme solides lorsque la sollicitation est rapide, mais coulent si on l’étire lentement. Lors du pressage de feuilles métalliques à froid, le solide prend la forme de l’outil et ne revient pas à sa forme initiale (heureusement !) car on dépasse sa limite d’élasticité : pendant un temps très court, il coule (ou parle de comportement plastique).

Il est bon de connaître au moins l’existence de ces fluides “bizarres”, qui ne le sont en réalité que parce que leur comportement dépend de l’échelle de temps considérée. L’étude du comportement d’une substance sous une sollicitation donnée porte le nom de *rhéologie*. Nous nous limiterons à priori dans ce cours à des cas “courants”, bien que certains principes énoncés soient d’une portée plus générale.

1.2 Propriétés.

1.3 Description comme un milieu continu.

1.3.1 Séparation des échelles

Nous avons mentionné ci-dessus le caractère “granulaire” des fluides : ils sont constitués d’entités élémentaires, atomes ou molécules. On conçoit qu’il serait difficile de prendre en compte les mouvements individuels de toutes ces entités, pour étudier le mouvement d’un liquide dans un tuyau ou de l’air autour d’une aile d’avion... Ce serait de plus contre-intuitif puisqu’à l’échelle humaine, nous ne voyons ni ne sentons pas individuellement les molécules³, mais nous savons en revanche appréhender leur mouvement (ou leur non-mouvement) d’ensemble à notre échelle (dite macroscopique).

³Il est intéressant de noter du reste que la mécanique des fluides est bien antérieure à la description atomistique de la matière, et que les premières équations descriptives furent de fait établies à l’échelle macroscopique.

L'idée de l'approche macroscopique est basée sur le fait que des molécules suffisamment voisines ont le même mouvement d'ensemble, et ne diffèrent que par des mouvements d'agitation thermique aléatoires⁴. Dans ces conditions, il est possible de trouver un petit volume spatial ϵ , contenant suffisamment de molécules pour pouvoir effectuer une moyenne de grandeurs microscopiques sur ce volume, mais suffisamment petit pour ne pas gommer les variations macroscopiques.

Prenons une analogie : imaginons un embouteillage s'étendant sur plusieurs dizaines de kilomètres que nous regardons depuis un hélicoptère⁵ et examinons ce que nous voyons en fonction de la hauteur de l'hélicoptère (Fig. 1.1) :

- si nous sommes proches du sol, nous verrons les déplacements individuels de quelques voitures, mais sans voir l'évolution d'ensemble. Nous avons une **vue microscopique** (Fig. 1.1.c)
- à l'inverse si nous volons très haut, nous verrons plusieurs milliers de voitures et les variations de densité de l'embouteillage (où encore les variations de distances entre deux voitures successives) deviendront visibles : dans certaines zones les voitures seront pare-chocs contre pare-chocs et à l'arrêt, dans d'autres elles seront un plus écartées les unes des autres et en mouvement. C'est une **vue macroscopique** (Fig. 1.1.a). Notons que les variations de densité apparaissent alors comme une fonction continue, voire dérivable⁶
- Si nous volons à une altitude intermédiaire entre ces deux points de vue, nous voyons un grand nombre de voitures (six sur la figure) équidistantes et se déplaçant en gros à la même vitesse : c'est le volume ϵ dont nous parlions. Il est très grand à l'échelle de la voiture, mais très petit à l'échelle de l'embouteillage. On parle de volume **mésoscopique** (mésos = du milieu, scopos = observer) ou de méso-échelle (Fig. 1.1.b).

Si cette **séparation des échelles** est possible,⁷ nous pouvons assimiler ϵ à une variation infinitésimale dx de longueur macroscopique x et définir la densité locale de voitures par une fonction continue $\rho(x)$ (la courbe tracée sur la figure 1.1) telle que le nombre de voitures à l'intérieur de dx est :

$$dN = \rho(x) dx$$

⁴Avertissons le lecteur dès maintenant que ces mouvements thermiques sont responsables des phénomènes de transfert de chaleur et de matière, ainsi que du frottement visqueux. L'approche macroscopique ne consiste donc surtout pas à les négliger, mais plutôt à les moyenner pour obtenir des lois sur les grandeurs macroscopiques. On retrouve ainsi les lois de Fourier, Fick, ainsi que la loi de frottement visqueux des fluides dit newtoniens. Mathématiquement ce moyennage est très complexe car les interactions deux à deux entre molécules doivent être considérées.

⁵L'analogie du trafic routier avec les fluides n'est pas totalement fortuite. Il existe effectivement des modèles de milieux continus pour ce genre de problème, semblables d'une certaine manière aux équations du mouvement des fluides compressibles.

⁶Ce n'est plus vrai en toute rigueur dans le cas important des phénomènes de chocs.

⁷Elle ne l'est pas toujours en mécanique des fluides, ou bien dans le cas de milieux trop raréfiés, ou encore dans les phénomènes de chocs, où les grandeurs macroscopiques varient sur quelques longueurs moléculaires. Ce type d'hypothèse est également utilisé pour décrire les milieux diphasiques (liquides à bulle, suspensions,...) comme des milieux monophasiques.

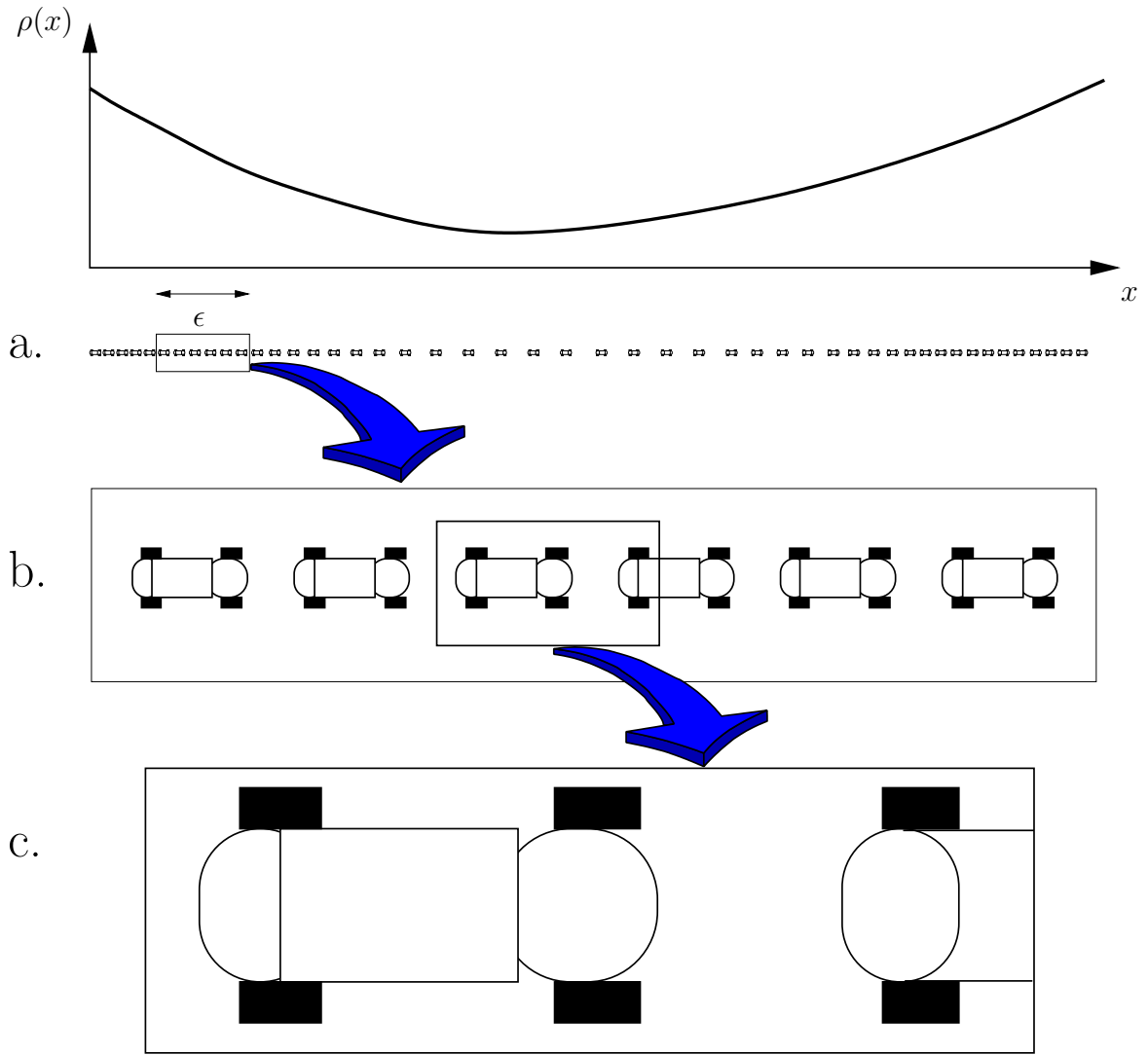


FIG. 1.1 – Un embouteillage vu depuis trois échelles très différentes : celle de la voiture (en bas), celle de l’embouteillage (en haut), et une échelle intermédiaire contenant beaucoup de voitures, mais où la densité varie peu.

de telle sorte que le nombre de voitures entre les abscisses a et b s’écrit :

$$N = \int_a^b \rho(x) dx$$

1.3.2 Définition de la masse volumique

C’est ce type d’approche que l’on utilise pour décrire un fluide par un milieu continu (le volume intermédiaire contient dans ce cas plus de 6 “voitures”), sauf que nous avons un milieu tridimensionnel. Le volume ϵ est grand par rapport à la molécule (il en contient plein), mais petit par rapport à la longueur caractéristique du phénomène (Figure 1.2) : ce sera donc un élément infinitésimal de volume macroscopique $dV =$

$dx dy dz$ centré sur le point (x, y, z) .

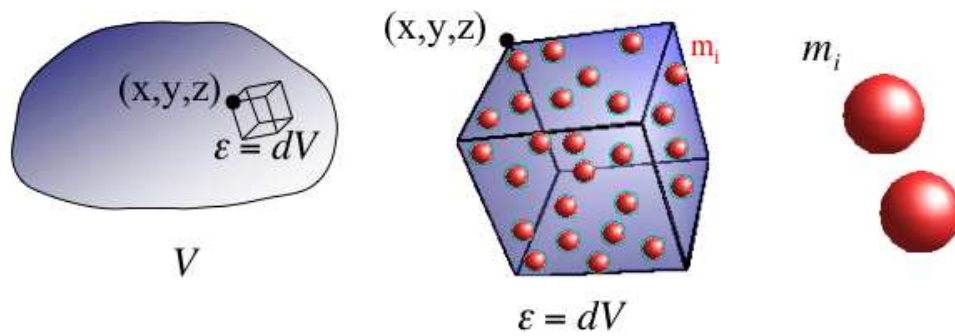


FIG. 1.2 – De gauche à droite : échelle macroscopique, mésoscopique, microscopique.

La masse de toutes les molécules $\sum m_i$ contenues dans ϵ est aussi, à l'échelle macroscopique, une quantité infinitésimale dM . On définira donc **la masse volumique** locale par :

$$\rho(x, y, z, t) = \frac{\sum_i m_i}{\epsilon} = \frac{dM}{dV} \quad (1.1)$$

dont l'unité S.I. est le kg/m^3 . Notons que ρ dépend a priori du temps puisque des molécules peuvent entrer et sortir du volume dV . Si nous cherchons la masse $M(t)$

d'un volume V macroscopique (celui de la figure 1.2 gauche, par exemple), il suffit d'intégrer cette relation sur tout ce volume :

La masse d'un volume de fluide V s'écrit :

$$M(t) = \iiint_V \rho \, dV \quad (1.2)$$

Remarque : nous prendrons pour habitude de ne pas écrire la dépendance des intégrales en (x, y, z, t) , afin d'alléger les écritures, mais il convient de retenir que ceux-ci dépendent à priori des 3 variables d'espace, et ne pas les sortir par erreur des intégrales.

Un cas particulier important sur lequel nous reviendrons souvent est celui où la masse volumique peut être considérée constante à la fois dans l'espace et le temps. On parle alors de *fluide incompressible*. Dans ce cas la masse d'un volume V est simplement donnée par $M = \rho V$. Dans la plupart des applications, les liquides seront considérés incompressibles. Les gaz en écoulement peuvent être aussi très souvent considérés incompressibles. En fait, la validité de cette approximation ne porte pas sur le type du fluide, mais sur la valeur du nombre de Mach (voir section 4.4.4).

1.3.3 Vitesse et quantité de mouvement

Comment maintenant définir la vitesse macroscopique du fluide en un point ? Notre but est d'étudier l'écoulement des fluides sous l'influence de forces, qui modifient la quantité de mouvement \mathbf{P} du fluide. Il est donc pertinent de définir la vitesse moyenne à partir d'une moyenne de la quantité de mouvement, soit :

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{d\mathbf{P}}{\rho dV}, \quad (1.3)$$

où l'on a utilisé le fait que, d'après la section précédente, la masse du volume de moyennage ϵ est $\sum m_i = M = \rho dV$

La quantité de mouvement globale d'un volume V s'écrit :

$$\mathbf{P}(t) = \iiint_V \rho \mathbf{v} \, dV \quad (1.4)$$

On notera que \mathbf{v}_i , vitesse des molécules, inclut à la fois le mouvement macroscopique du fluide, mais aussi l'agitation thermique microscopique. L'opération de moyennage de la quantité de mouvement permet de faire disparaître cette dernière contribution. Ainsi dans un fluide au repos, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ mais $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$.

1.3.4 Grandeurs énergétiques

Par un processus de moyennage similaire, il nous est possible de moyenner l'énergie cinétique du fluide. La mécanique d'un ensemble de masse ponctuelles fournit le cadre théorique pour ce faire. Nous ne souhaitons pas ici entrer dans le détail, mais il nous paraît important de rappeler un résultat essentiel sous-tendant le premier principe de la thermodynamique. L'énergie cinétique dans le référentiel du laboratoire d'un ensemble de particules en mouvement est égale à :

- l'énergie cinétique de leur centre de masse, où serait concentrée la somme des masses des particules. Cette contribution correspond à l'énergie cinétique macroscopique du fluide en écoulement notée K . Pour le volume dV de la figure 1.2, on a donc $dK = \frac{1}{2}dm v^2 = \frac{1}{2}\rho dV v^2$. L'énergie cinétique macroscopique d'un volume de fluide V s'écrit donc :

$$K(t) = \iiint_V \frac{1}{2}\rho v^2 dV \quad (1.5)$$

- l'énergie cinétique des particules dans le référentiel du centre de masse. C'est l'énergie d'agitation thermique du fluide, qui contribue à l'énergie interne⁸

Pour cette dernière, il est plus pratique d'utiliser une grandeur massique. Ainsi, pour un gaz parfait (c'est aussi vrai pour un liquide incompressible, cf. cours de thermodynamique), l'énergie interne massique est simplement définie par $du = C_v dT$. L'énergie interne par unité de volume est obtenue en multipliant l'énergie massique u (en J/kg) par la masse volumique ρ (en kg/m³), et l'énergie interne d'un volume de fluide V sera donc donnée par :

$$U(t) = \iiint_V \rho u dV \quad (1.6)$$

1.4 Grandeurs locales et globales

A ce point, nous avons défini le fluide comme un milieu continu, où toutes les “aspérités” microscopiques sont gommées. Nous savons définir la masse, la quantité de mouvement et les différents types d'énergies d'un volume de fluide V .

⁸En fait C'EST l'énergie interne en l'absence d'interactions entre particules. Dans le cas inverse, l'énergie interne comporte aussi une contribution de l'énergie potentielle d'interaction.

Notons que toutes les grandeurs macroscopiques que nous avons définies ci-dessus (M , \mathbf{P} , U et K) sont des grandeurs extensives, c'est-à-dire proportionnelles à la quantité de matière. Ainsi, les relations (1.2), (1.4), (1.6) et (1.5) sont toutes de la forme :

$$G(t) = \iiint_V g \, dV,$$

où g est une **grandeur volumique**, exprimée en (Unité de G) / (Unité de volume). Les grandeurs volumiques associées à M , \mathbf{P} , U et K sont respectivement ρ , $\rho\mathbf{v}$, ρu et $\rho v^2/2$. Le but des chapitres suivants est de calculer les variations temporelles de ces grandeurs sur la base de grands principes physiques.

Il convient de bien comprendre que G est une grandeur globale, calculée pour un volume macroscopique V donné, et ne dépend que du temps. En revanche g est une grandeur volumique locale, dépendant en plus du point macroscopique (x, y, z) considéré. Mathématiquement G est une fonction d'une variable et admet une dérivée temporelle, alors que g est une fonction de 4 variables et admet des dérivées partielles par rapport à ces 4 variables.

1.5 Volume fixe ou mobile ?

Notons que dans les définitions ci-dessus, aucune restriction sur le volume V n'a été énoncée. Aussi le volume V peut-il être :

- un volume fixe dans le référentiel de l'observateur, et donc continuellement traversé par de nouvelles molécules de fluide. On parle de volume **“Eulérien”**. Dans une installation, c'est par exemple le cas d'un récipient, d'une cuve, d'une pompe, d'un tronçon de tuyauterie. Selon la terminologie de la thermodynamique, c'est un système ouvert.
- un volume dont les frontières bougent au cours du temps. En particulier, si ces frontières bougent *avec le fluide*, on parle de volume **“Lagrangien”**. Une propriété fondamentale d'un volume lagrangien est qu'il contient toujours les mêmes particules fluides, même si celles-ci se déplacent en son intérieur. C'est un système fermé.

Pour bien différencier les deux, prenons l'image suivante : imaginez une course cycliste (l'écoulement), les coureurs étant les particules fluides :

- le tronçon de route entre deux voitures arrêtées sur le bord est un volume eulérien car des cyclistes toujours différents passent continuellement devant ces voitures.
- le tronçon de route (mobile) compris entre la voiture de tête et la voiture-balai est un volume lagrangien car il contient toujours les mêmes cyclistes. Il se déplace avec les coureurs.

On remarquera deux choses importantes :

- le nombre de cyclistes peut varier dans le volume eulérien (demandez-vous pourquoi) alors qu'il est fixe dans le volume lagrangien. De même la masse de fluide peut varier dans un volume eulérien, mais est constante dans un volume lagrangien.
- le volume du volume eulérien est constant (les voitures-frontière sont arrêtées). En revanche lorsque le peloton s'étire, le volume du volume lagrangien augmente.

La figure 1.3 montre des exemples de volumes eulériens et lagrangiens.

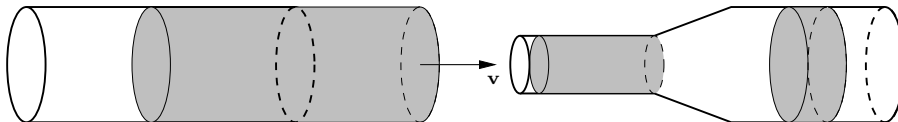


FIG. 1.3 – En blanc : volume eulérien, en grisé : volume lagrangien

Chapitre 2

Introduction aux bilans

2.1 Introduction intuitive

Le génie des procédés, et en particulier le mouvement des fluides, est régi par des principes dits “de conservation” ou encore de “bilan” (terminologie chère au génie chimique). Un bilan décrit les variations temporelles d’une grandeur au sein d’un système, que l’on considérera ouvert (au sens de la thermodynamique), c’est-à-dire que la grandeur peut rentrer ou sortir du système.

Tout un chacun sait écrire un bilan, tout au moins lorsque la grandeur fait partie de la vie courante. Prenons par exemple le cas où la grandeur est une quantité d’argent A et le système mon compte en banque. Pour connaître la quantité d’argent instantanée sur mon compte, j’écris entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Mon compte} & & \text{Mon compte} & & \text{Mes revenus} & & \text{Mes dépenses} \\ \text{en banque} & - & \text{en banque} & = & \text{(ce qui rentre)} & - & \text{(ce qui sort)} \\ \text{en banque à } t_2 & & \text{en banque à } t_1 & & \text{entre } t_1 \text{ et } t_2 & & \text{entre } t_1 \text{ et } t_2 \end{array} \quad (2.1)$$

Pour formaliser plus avant ces variations, appelons :

- $G(t)$ la quantité d’argent instantanée sur mon compte (on supposera à tort que c’est une fonction dérivable du temps...),
- $\Phi_e(t)$ mes revenus instantanés (quantité d’argent qui rentre par unité de temps à l’instant t),
- $\Phi_s(t)$ mes dépenses instantanées (quantité d’argent qui sort par unité de temps à l’instant t).

Prenons t_1 et t_2 infiniment proches soit $t_1 = t$ et $t_2 = t + dt$. Le bilan s’écrit :

$$G(t + dt) - G(t) = \Phi_e(t)dt - \Phi_s(t)dt$$

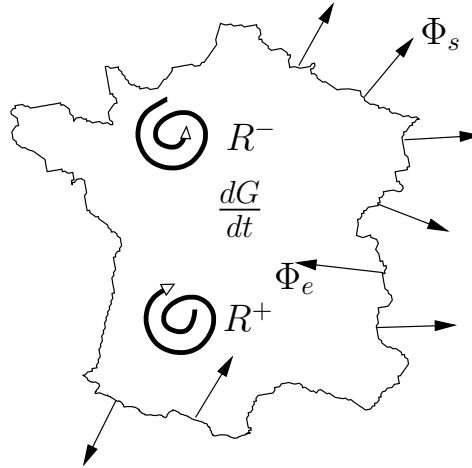


FIG. 2.1 – Bilan du nombre d'habitants d'un pays

soit :

$$\underbrace{\frac{dG}{dt}}_{\text{Variation de } G \text{ pendant } dt.} = \underbrace{\Phi_e(t)}_{\text{Flux de } G \text{ entrant.}} - \underbrace{\Phi_s(t)}_{\text{Flux de } G \text{ sortant.}} \quad (2.2)$$

Le membre de gauche est une variation (positive ou négative) qu'on appellera **terme d'accumulation** et les termes de droite sont des **termes de flux**, respectivement entrant et sortant. Les trois grandeurs s'expriment par exemple en Euro / jour.

Dans cet exemple, il y a une quantité qui se conserve : l'argent (jusqu'à preuve du contraire...). C'est-à-dire qu'elle ne peut ni disparaître ni apparaître, elle ne fait que s'accumuler dans le système ou entrer / sortir du système. En physique c'est le cas de l'énergie et de la masse.

Prenons un autre exemple : le système est un pays (Fig. 2.1), avec ses frontières, la grandeur est le nombre de personnes instantané $G(t)$ dans ce pays. Ses variations peuvent provenir de 3 causes :

- des personnes entrent ou sortent du pays en traversant ses frontières,
- des personnes naissent,
- des personnes meurent.

On voit que les deux dernières causes n'existaient pas dans le cas de l'argent. Ici il peut y avoir création ou destruction de la grandeur étudiée. Le bilan s'écrit alors, en reprenant les mêmes notations pour les flux entrant et sortant, et en notant respectivement $R^+(t)$ et $R^-(t)$ les nombres de naissances et de décès par unité de temps :

$$\underbrace{\frac{dG}{dt}}_{\text{Variation de } G \text{ pendant } dt.} = \underbrace{\Phi_e(t)}_{\text{Flux de } G \text{ entrant.}} - \underbrace{\Phi_s(t)}_{\text{Flux de } G \text{ sortant.}} + \underbrace{R^+(t)}_{\text{Production de } G.} - \underbrace{R^-(t)}_{\text{Destruction de } G.} \quad (2.3)$$

Les termes R^+ et R^- sont classiquement appelés **terme source** et **terme puit**.

En physique, des grandeurs telles que G peuvent être par exemple un nombre de moles (par réaction chimique), la quantité de mouvement (à cause des forces extérieures), l'entropie (selon le second principe). Ces quantités ne se conservent pas à proprement parler puisqu'on peut les créer où les détruire ¹, mais on parle malgré tout d'équation de conservation.

Notons que la distinction entre termes sources/puits et termes de flux est claire du point de vue physique, elle peut être arbitraire, mathématiquement parlant. Nous verrons par exemple que le premier principe de la thermodynamique, qui ne fait qu'exprimer la conservation de l'énergie peut être énoncé en prenant pour grandeur énergie interne + énergie cinétique et en prenant pour termes sources/puits la puissance des forces extérieure + puissance thermique, ce qui conduit à une équation du type (2.3). Mais la puissance thermique elle-même peut être un flux comme nous le verrons ultérieurement.

2.2 Transport diffusif et convectif

Nous avons vu qu'un volume peut se vider ou se remplir par ses frontières d'une grandeur extensive G : d'argent (flux financier), de personnes (flux migratoire) ... Dans un fluide, les grandeurs extensives sont la masse, la quantité de mouvement ou l'énergie (cinétique, interne). Lorsque ces grandeurs traversent la frontière du volume, on parle de **transport**.

De façon générale, il convient de bien distinguer deux types de transport :

- le **transport diffusif** intervient même en l'absence de mouvement visible à l'échelle macroscopique.
- le **transport convectif** lié directement au mouvement macroscopique du fluide

2.2.1 Qu'est ce qu'un flux ?

Il convient tout d'abord de mesurer la “vitesse” à laquelle le volume se remplit ou bien se vide. Par exemple pour un flux migratoire on pourra parler de nombre de

¹dans le cas de l'entropie, le second principe de la thermodynamique en interdit la destruction. . .

personnes qui entrent ou qui sortent du pays par année, ou par toute autre unité de temps. Pour un fluide on cherchera par exemple à connaître la quantité d'eau qui coule d'un robinet par unité de temps. Ce type de grandeur s'appelle un **flux**. Il est homogène à l'unité de la grandeur G par unité de temps : des kg/s pour un flux massique, des Joule/s (ou Watt) pour un flux d'énergie etc. C'est un vecteur puisque le transport va d'un point vers un autre.

En général la grandeur G ne rentre (ou sort) pas partout à la même vitesse du volume V . Pour cela il est intéressant de ramener le flux à une unité de surface. On parle alors de **densité de flux** (qui est aussi un vecteur).

2.2.2 Transport diffusif (parenthèse)

Ce type de transport est provoqué par le déséquilibre d'une grandeur au sein du milieu, le système tentant de revenir à l'équilibre. Tout le monde sait par exemple que lorsqu'il existe un point chaud et un point froid dans un corps, la chaleur est transportée du point chaud vers le point froid pour tenter d'homogénéiser les températures : il s'agit d'un flux d'énergie, et l'on parle de **diffusion thermique**. Ce flux d'énergie n'est pas transporté par un mouvement global de fluide, mais aux mouvements à l'échelle microscopique. La densité de flux énergétique correspondante est donné par la **loi de Fourier** (cf. cours de transfert de chaleur) :

$$\phi = -\lambda \mathbf{grad} T$$

Le paramètre λ est appelé conductivité thermique et son unité S.I. est le W/m/K.

De même, si l'on verse du lait dans du café très lentement pour éviter tout mouvement, on constate que les deux finissent par se mélanger parfaitement : dans un mélange de deux espèces A et B, l'espèce A diffuse des régions où elle est la plus concentrée vers celle où elle l'est le moins. Ici encore, ce flux de matière n'est pas transporté par un mouvement global de fluide, mais est lié uniquement aux collisions entre les différentes molécules à l'échelle microscopique. La densité de flux massique de l'espèce A est fournie par la **loi de Fick** (cf. cours de transfert de matière).

$$\mathbf{j}_A = -D_{AB}\rho \mathbf{grad} \omega_A$$

où ω_A est la fraction massique de A, et D_{AB} est appelé coefficient de diffusion de A dans B (en m²/s).

La quantité de mouvement dans un fluide en mouvement diffuse également, à cause du frottement des couches fluides les unes sur les autres, phénomène appelé **viscosité**. Nous y reviendrons lors de l'étude des forces exercées sur un fluide.

Les transferts diffusifs, et notamment les deux formules ci-dessus, ne nous serviront

pas dans le cadre de ce cours car :

- les transferts de matières diffusifs n'interviendront pas parce qu'ils ne concernent que des mélanges de plusieurs fluides, non considérés dans ce cours.
- les transferts de chaleur diffusifs interviendront comme des termes source/puit de chaleur (\dot{Q}) dans l'expression du premier principe, mais ne seront pas explicités.
- les transferts diffusifs de quantité de mouvement interviendront implicitement dans les forces appliquées au fluide, considérées comme des sources/puits de quantité de mouvement.

2.2.3 Flux convectif

Le flux convectif (du latin cum = avec, vectare = transporter) est lié au transport d'une quantité par le mouvement du fluide. Tout le monde a un jour ou l'autre remué l'eau dans une baignoire pour transporter l'eau chaude coulant du robinet vers l'autre bout de la baignoire. L'agent de transport est dans ce cas le fluide lui-même et est bien plus rapide que le flux diffusif. C'est pour la même raison que l'on remue son café pour mélanger le sucre ou le lait, sa soupe ou une sauce dans une casserole pour la refroidir, que l'on agite les réacteurs chimiques. Rappelez-vous également combien il est difficile de mélanger deux peintures de couleurs différentes : s'il fallait attendre qu'elle se mélangent par diffusion, il faudrait attendre des années, c'est pourquoi il faut remuer le mélange.

Le but de cette section est de quantifier ce flux convectif pour n'importe quelle grandeur traversant la surface frontière S d'un volume V **eulérien, c'est-à-dire fixe dans l'espace**.

Prenons pour commencer l'exemple simple suivant : de la fumée sort d'une pièce fermée par une fenêtre à cause d'un vent de vitesse $v(t)$, uniforme et perpendiculaire à la fenêtre (Fig. 2.2), par exemple causé par un ventilateur. Intuitivement, on conçoit bien qu'il sortira, pendant un temps donné, d'autant plus de fumée que celle-ci est concentrée d'une part, et que le vent est violent d'autre part.

Passons à l'évaluation de la masse de fumée dG sortant pendant un temps dt : c'est celle qui se trouve dans un volume $S dl$ où $dl = v dt$ est le trajet parcouru par la fumée pendant un temps dt (Fig. 2.2), soit, si nous appelons g la densité de la fumée (la masse de fumée par unité de volume) :

$$\underbrace{dG}_{\text{kg}} = \underbrace{g}_{\text{kg/m}^3} \times \underbrace{S}_{\text{m}^2} \times \underbrace{v}_{\text{m/s}} \times \underbrace{dt}_{\text{s}};$$

Imaginons maintenant que la densité de la fumée g et/ou la vitesse v ne soit plus uniforme sur toute la surface de la fenêtre (Fig. 2.3), mais dépende de la position (x, y) du point de la fenêtre considéré : il faut alors calculer les quantités infinitésimales rentrant par chaque petit élément de surface $dS = dx dy$ et intégrer sur

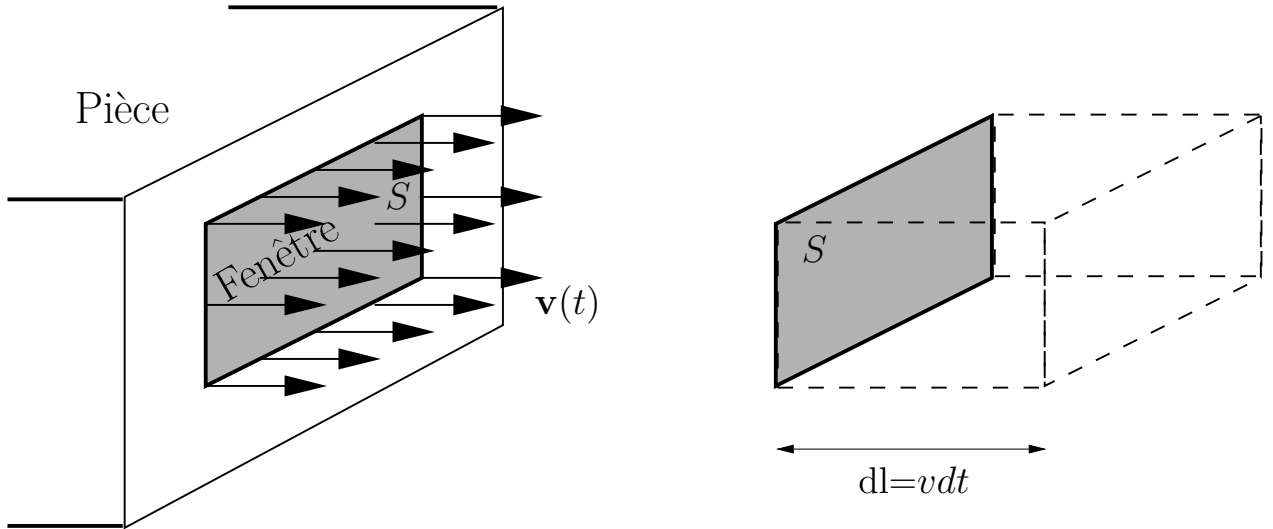


FIG. 2.2 – Fumée sortant d’une pièce par une fenêtre.

toute la surface. La quantité de fumée d^2G sortant de la pièce ² par dS est la fumée contenue dans le volume $dS \times v dt$, soit :

$$d^2G = g dS \times v dt$$

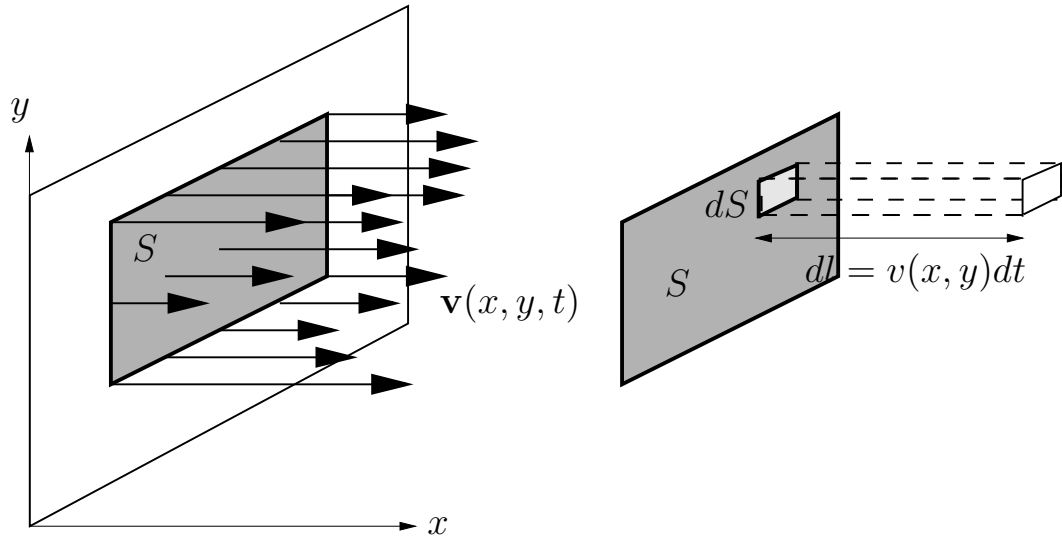


FIG. 2.3 – Fumée sortant d’une pièce par une fenêtre avec une vitesse non homogène.

soit, en intégrant sur tout la surface de la fenêtre :

$$dG = dt \times \iint_S g v dS$$

²On le note ainsi car dS et dt étant tous deux infiniment petits, d^2G est un infiniment petit d’ordre 2.

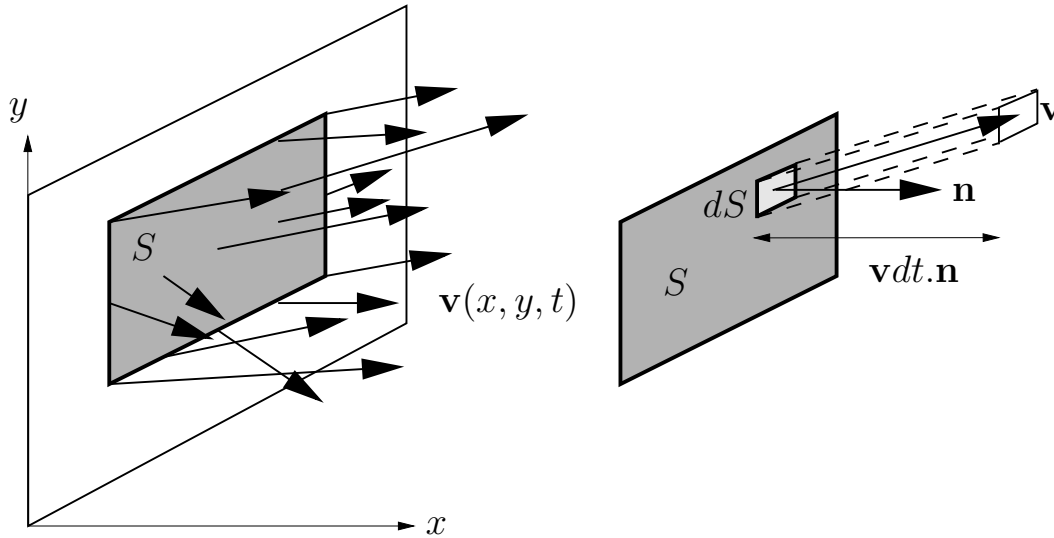


FIG. 2.4 – Fumée sortant d’une pièce par une fenêtre avec une vitesse non homogène et non perpendiculaire à la fenêtre.

Notons que cette expression, sous réserve que v représente la composante (positive ou négative) du vecteur \mathbf{v} suivant l’axe sortant de la pièce, autorise qu’en certains points de la fenêtre, la fumée re-rentre dans la pièce : l’intégrale ci-dessus est alors le bilan entre la masse sortante et la masse entrante dans la pièce.

Il reste à voir le cas le plus général où la vitesse n’est pas orthogonale à la surface (Fig. 2.4). Considérons un petit élément dS de la fenêtre et désignons par \mathbf{n} le vecteur normal à dS , *orienté de l’intérieur vers l’extérieur de la pièce* (on parlera de vecteur normal sortant).

par dS est la quantité de fumée dans le volume pointillé sur la figure. Ce volume vaut $dS \times (\mathbf{v} dt \cdot \mathbf{n})$ et donc :

$$d^2G = g dS \times \mathbf{v} dt \cdot \mathbf{n}$$

et le flux sortant de la pièce pendant dt est obtenu en intégrant sur tous les éléments de surface dS :

$$dG = dt \times \iint_S g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.4)$$

Rappelons que les grandeurs à l’intérieur de l’intégrale dépendent du point de la surface considérée : g parce que la concentration de fumée peut varier d’un point à un autre, \mathbf{v} parce que la vitesse du fluide peut varier d’un point à un autre, et \mathbf{n} parce que la surface peut être courbe, auquel cas le vecteur normal varie d’un point à un autre.

Notons ensuite que cette définition fonctionnerait aussi si la fumée entraînait dans la pièce au lieu d'en sortir : on aurait alors $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$ en tout point, et la quantité de fumée sortant de la pièce dG est aussi négative. Dans le cas général où la fumée peut entrer en certains points ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$) et sortir en d'autres ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$), on voit que la formule (2.4) **fournit le bilan entre la fumée sortante et la fumée entrante pendant l'intervalle de temps dt** . C'est donc très précisément l'opposé de la grandeur $dt \times [\Phi_e(t) - \Phi_s(t)]$ intervenant dans l'équation de bilan (2.3), et nous avons donc :

Par unité de temps, un fluide de champ de vitesse \mathbf{v} transporte à l'intérieur d'un volume V **fixe dans l'espace** une quantité nette de G égale à :

$$\Phi_e(t) - \Phi_s(t) = - \iint_S g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.5)$$

où g est la quantité de G par unité de volume.

Dans le cas où le volume V verrait ses frontières bouger, au lieu d'être fixes, il est facile de généraliser ce résultat en remplaçant le champ de vitesse \mathbf{v} par $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, ou \mathbf{w} est la vitesse locale en chaque point de la frontière. Dans le cas extrême où $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, c'est-à-dire quand la frontière bouge avec le fluide (V est alors un volume Lagrangien), on voit clairement que le flux convectif est nul : le fluide ne peut transporter une grandeur à travers la frontière puisque vu depuis celle-ci, il est immobile.

2.3 Bilan d'une grandeur volumique dans un milieu continu

2.3.1 Écriture générale

Il suffit maintenant d'introduire ce terme de flux dans le bilan (2.3).

Les variations d'une grandeur volumique g dans un volume V limité par une surface S (Fig. 2.5) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{dG}{dt} &= \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_V g \, dV}_{\text{Accumulation de } G} \\
 &= \underbrace{- \iint_S g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\substack{\text{Flux convectif de } G \\ \text{entrant - sortant}}} + \underbrace{R^+(t)}_{\text{Production de } G} - \underbrace{R^-(t)}_{\text{Destruction de } G}. \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

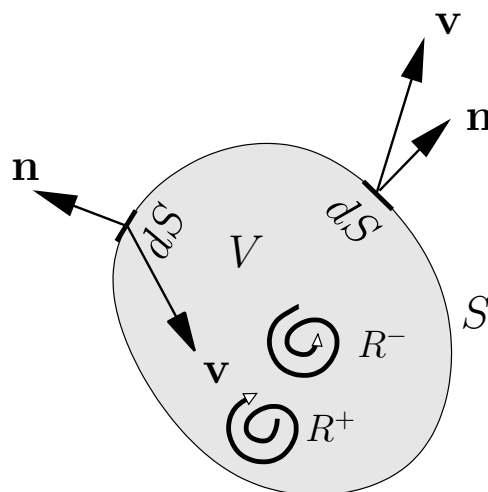


FIG. 2.5 – Bilan d'une grandeur g sur un volume V

Rappelons que cette formule est liée à l'orientation du vecteur normal à la frontière **vers l'extérieur**. Si le vecteur normal était pris vers l'intérieur nous aurons un signe + devant l'intégrale de surface.

Les trois équations de bilan régissant le mouvement des fluides sont toutes de ce type, respectivement avec $g = \rho$ pour la masse, $g = \rho \mathbf{v}$ pour la quantité de mouvement

et $g = \rho(e + v^2/2)$ pour l'énergie. Pour chacune d'entre elles, il nous reste juste à spécifier quels sont les termes source et puit. Ces derniers résultent de trois grands principes physiques :

- l'impossibilité de créer ou détruire de la matière (conservation de la masse),
- la loi de la dynamique de Newton (conservation de la quantité de mouvement),
- le premier principe de la thermodynamique (conservation de l'énergie).

2.3.2 Une géométrie particulière : le tube de courant

Un tube de courant (Fig. 2.6) est un tube fictif dont les parois latérales S_{lat} sont en tout point tangentes au vecteur vitesse et comportant une section d'entrée S_e et une section de sortie S_s , toutes deux droites. Il peut s'agir par exemple d'un tube réel car la condition d'étanchéité impose que la composante normale de la vitesse sur une paroi solide (immobile) soit nulle (cf. section 4.2).

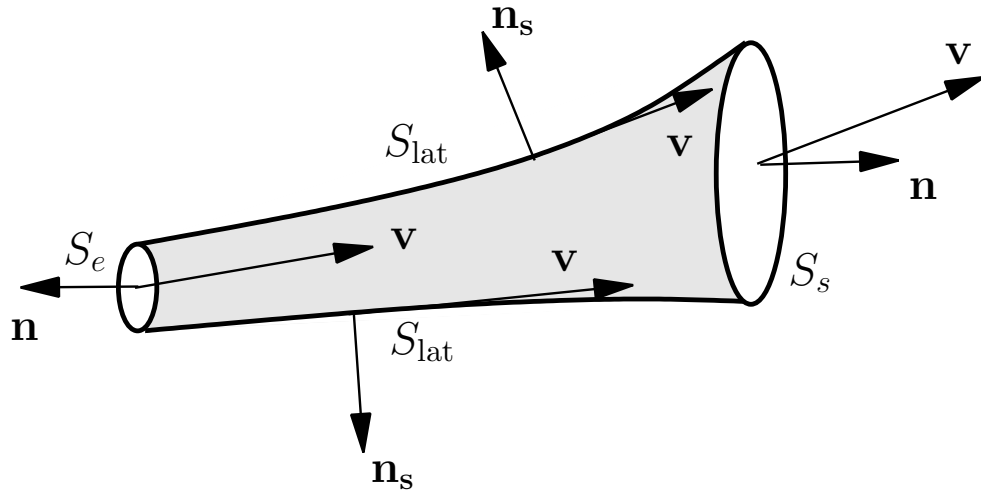


FIG. 2.6 – Tube de courant.

Dans ces conditions l'intégrale de surface se limite aux sections d'entrée et de sortie, car $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ est nul partout sur la surface latérale S_{lat} , et le bilan d'une grandeur g s'écrit, en décomposant la surface S en $S_e + S_s + S_{\text{lat}}$:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{dG}{dt}}_{\text{Accumulation de } G} &= - \underbrace{\iint_{S_e} g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\dot{G}_e = \text{Quantité } > 0 \text{ de } G \text{ rentrant dans le tube par } S_e \text{ par s}} - \underbrace{\iint_{S_s} g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\dot{G}_s = \text{Quantité } > 0 \text{ de } G \text{ rentrant dans le tube par } S_s \text{ par s}} \\
 &+ \underbrace{R^+(t)}_{\text{Taux de production de } G} - \underbrace{R^-(t)}_{\text{Taux de destruction de } G} .
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

La première intégrale de surface est négative car $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$ partout sur S_e et la seconde est positive car $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$ partout sur S_s . On peut donc les exprimer en fonction des deux grandeurs \dot{G}_e et \dot{G}_s , toutes deux positives représentant des débits de G (masse, énergie, ...) respectivement entrants et sortant par le tube.

Le tube de courant est une notion très importante car il permet de représenter, au sein d'un réseau de fluide, n'importe quel système ayant une entrée et une sortie (tronçon de tube, pompe, vanne, coude ...).

Un cas particulier très fréquent est le **régime permanent** où les propriétés de l'écoulement ne dépendent plus du temps. C'est le cas de nombreuses installations industrielles, du circuit de fréon de votre réfrigérateur, de votre cuisinière à gaz etc.... Dans le cas du tube de courant on obtient une expression particulièrement simple du bilan :

$$\underbrace{\dot{G}_s}_{\text{Le } G \text{ qui sort}} = \underbrace{\dot{G}_e}_{\text{Le } G \text{ qui rentre}} + \underbrace{R^+(t)}_{\text{Le } G \text{ qui est produit}} - \underbrace{R^-(t)}_{\text{Le } G \text{ qui est détruit}} . \quad (2.8)$$

2.3.3 Une approximation utile : l'écoulement piston

Lorsque l'on traite des écoulement dans des tubes réels, qui sont un cas particulier du tube de courant, il est tentant de supposer que le champ de vitesse ne varie pas transversalement dans les parties du tube où la section est constante : on parle alors d'**écoulement piston** car tout se passe comme si chaque tranche de fluide se déplaçait comme un piston solide (Fig. 2.7).

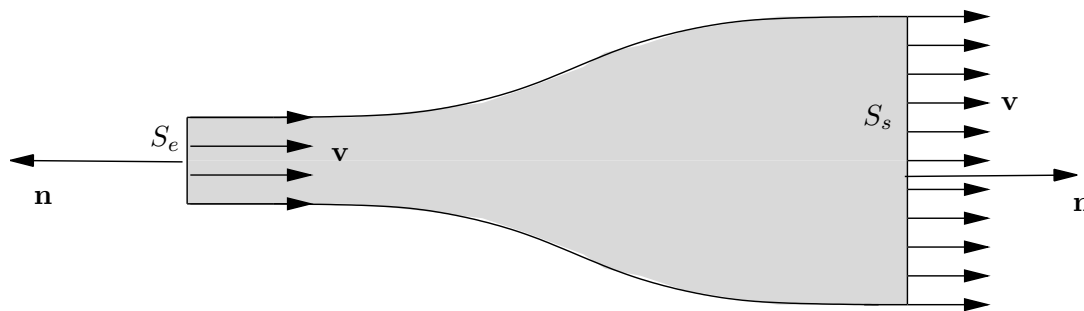


FIG. 2.7 – Modèle de l'écoulement piston. Le vecteur vitesse est uniforme dans toute section du tube.

Dans ce cas, les intégrales sur les surfaces d'entrée et de sortie intervenant dans le bilan (2.7) se simplifient car le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ est maintenant constant sur S_e ou S_s et peut être sorti de l'intégrale. Le débit de sortie s'écrit par exemple :

$$\dot{G}_s = \iint_{S_s} g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = v_s \iint_{S_s} g dS = g_s v_s S_s \quad (2.9)$$

où v_s est le module de la vitesse à la sortie du tube, et g_s est la valeur moyenne de g sur la section S_s . On a de même :

$$\dot{G}_e = - \iint_{S_e} g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = v_e \iint_{S_e} g dS = g_e v_e S_e \quad (2.10)$$

Si un écoulement dans un tube peut être considéré comme un écoulement piston, nous pouvons écrire, en tout point du tube le débit d'une grandeur g sous la forme :

$$\dot{G} = gvS \quad (2.11)$$

où v est la vitesse du fluide au point considéré, S la section du tube et g la valeur local de la grandeur volumique considérée.

Dans ces conditions, le bilan (2.7) entre l'entrée et la sortie du système prend une forme particulièrement simple, puisque les intégrales ont disparu, au profit de valeurs moyennées sur les sections. On obtient

Le bilan d'une grandeur g sur un tube de courant dans l'hypothèse d'un écoulement piston s'écrit :

$$\frac{dG}{dt} = \underbrace{g_e v_e S_e}_{\dot{G}_e} - \underbrace{g_s v_s S_s}_{\dot{G}_s} + R^+(t) - R^-(t) \quad (2.12)$$

Dans cette équation v_e et v_s sont des vitesses moyennes sur les sections d'entrée et de sortie.

Il reste à savoir si une telle approximation est justifiée. En fait, un profil de vitesse uniforme dans la section du tube est impossible : en effet, comme nous le verrons plus tard, le frottement visqueux du fluide sur la paroi impose que le champ de vitesses est nécessairement nul sur celle-ci. Le champ de vitesse doit donc en réalité passer continument de 0 à la paroi à sa valeur maximale au centre du tube. Selon que l'écoulement est laminaire ou turbulent, le profil de vitesse est soit parabolique (on parle alors d'écoulement de Poiseuille³), soit aplati (Fig. 2.8).

³Ce résultat est relativement simple à démontrer à partir des équations de Navier-Stokes, qui relève de la seconde partie du cours consacrée aux fluides réels (c.a.d pour lesquels on prend en compte le frottement visqueux).



FIG. 2.8 – Profils de vitesse dans un tube pour un écoulement laminaire (à gauche), et turbulent (à droite).

Cependant, il est toujours possible de représenter ces types d'écoulement réels par des écoulements piston dont la vitesse est une moyenne de la vitesse sur la section du tube. On pose alors :

$$v = \frac{1}{S} \iint_{\text{section}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

et l'on considère que la vitesse prend cette valeur en tout point du tube. Pour un écoulement laminaire, la théorie de Poiseuille montre que cette vitesse moyenne est égale à 1/2 de la vitesse max, réalisée au centre du tube.

2.4 Équations de conservation pour un fluide

2.4.1 Conservation de la masse

Le principe physique stipule que (hormis pour des réactions nucléaires), la masse de matière se conserve. Par conséquent un volume V fixe dans l'espace peut accumuler de la matière ou en échanger avec l'extérieur mais pas en créer ni en détruire. L'équation de bilan de masse d'un fluide ne comporte ni terme source, ni terme puit.

Utilisant les résultats du chapitre précédent, nous avons donc, en prenant $G = M$ la masse du volume V et $g = \rho$ la masse volumique :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV = - \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.13)$$

2.4.2 Conservation de la quantité de mouvement

2.4.2.1 Rappel de mécanique

On peut questionner la pertinence du terme “conservation”. Il convient cependant de se remémorer comment est définie la notion de force en mécanique : une force est associée à l'échange de quantité de mouvement entre deux systèmes. Si ces deux systèmes sont isolés de l'extérieur, la somme de leurs quantités de mouvement reste constante au cours du temps, quelle que soit leur interaction mutuelle. Par exemple un couple de patineurs sur la glace est quasiment isolé de l'extérieur si l'on peut négliger le frottement des patins. S'ils se tiennent par la main, ils interagissent et échangent de la quantité de mouvement, mais la somme des deux reste constante. De même deux boules de billard qui se choquent échangent de la quantité de mouvement lors du choc, mais la somme des deux reste constante.

C'est en ce sens qu'il faut comprendre l'expression “conservation de la quantité de mouvement” : on peut dire que le fluide subit (ou exerce) une force extérieure, mais aussi qu'il échange de la quantité de mouvement avec l'extérieur, de telle sorte que la somme des quantités de mouvement fluide + extérieur reste constante. Il est important de retenir cette notion pour bien comprendre la physique sous-jacente aux équations qui vont suivre.

On retiendra donc :

Une force subie par le fluide correspond à un accroissement de sa quantité de mouvement. Une force exercée par le fluide correspond à une diminution de sa quantité de mouvement

2.4.2.2 L'équation générale

On considère toujours le volume V fixe dans l'espace. Les termes sources $R^+ - R^-$ sont les forces extérieures $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$, et l'équation de bilan (2.6) s'écrit, avec $G = \mathbf{P}$, et $g = \rho \mathbf{v}$:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV = - \iint_S \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (2.14)$$

Cette relation appelle plusieurs remarques :

1. Le lecteur ayant des notions en mécanique s'étonnera de la différence entre cette équation et la loi de la dynamique bien connue $d\mathbf{P}/dt = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$: il y a un terme de flux en plus ! Ce terme de flux vient du fait que contrairement aux systèmes étudiés habituellement, V **est un système ouvert (ou eulérien)** qui **ne contient jamais les mêmes particules matérielles** ! Aussi les particules fluides rentrant et sortant du volume V transportent-elles avec elles leur quantité de mouvement. C'est l'origine du terme de flux. Si nous avions pris un volume $V(t)$ lagrangien, qui suit le fluide dans son mouvement, et contient donc toujours la "même matière", les termes de flux disparaîtraient (pourquoi ?) et on retrouverait bien la loi de la dynamique dans sa formulation classique.
2. C'est une équation **vectorielle** et ce sont donc en fait trois équations faisant intervenir les trois composantes de la vitesse.
3. Le terme $\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$ doit être lu comme le "produit scalaire de \mathbf{v} par \mathbf{n} , ensuite multiplié par le vecteur $\rho \mathbf{v}$.

2.4.3 Conservation de l'énergie

2.4.3.1 Rappel : premier principe en système fermé.

Le premier principe de la thermodynamique stipule que, **pour un système fermé** :

$$\Delta(U + K) = W + Q \quad (2.15)$$

où U énergie interne, K énergie cinétique, W travail des forces extérieures et Q la quantité de chaleur échangée (comptée positivement si le système reçoit de la chaleur). Toutes ces grandeurs se comptent en Joule. Écrivons le premier principe pendant un intervalle de temps dt , nous obtenons

$$\frac{d}{dt}(U + K) = \dot{W} + \dot{Q} \quad (2.16)$$

où \dot{W} et \dot{Q} sont respectivement la puissance des forces extérieures et la puissance thermique échangée, comptées en Watt (attention la notation avec un point au-dessus ne signifie pas qu'il s'agisse d'une dérivée temporelle).

2.4.3.2 Adaptation au système ouvert.

Nous ne pouvons appliquer directement ce principe à notre volume V puisqu'il est traversé continuellement par de la matière différente : c'est un système ouvert. Cette matière entrante et sortante transporte de l'énergie cinétique et interne vers ou hors du volume V . Comment appliquer le premier principe à un système ouvert ? Tout simplement en remarquant que l'énoncé en système fermé (2.16) indique que \dot{W} et \dot{Q} sont des termes sources/puits pour les variations de la grandeur "énergie interne + énergie cinétique". Pour exprimer le premier principe en système ouvert, il suffit de rajouter les termes de flux convectif dans l'équation de bilan générique (2.6) avec $G = U + K$, $g = \rho(u + v^2/2)$ et $R^+ - R^- = \dot{W} + \dot{Q}$, soit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U + K) &= \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV & (2.17) \\ &= - \iint_S \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \dot{W} + \dot{Q} & (2.18) \end{aligned}$$

Ici comme pour la quantité de mouvement, on remarquera que si le volume V est un volume matériel, qui suit le fluide dans son mouvement (et est donc un système fermé) le terme de flux disparaît, et l'on retrouve l'expression classique du premier principe en système fermé.

2.4.4 Synthèse

Rappelons les équations de bilan obtenues pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie, écrites toutes les trois sous la forme d'un terme d'accumulation, un terme de flux sortant (algébrique, donc négatif pour un flux entrant) et un terme source (également algébrique, c.a.d positif si production, négatif si destruction) :

$$\begin{array}{rclcl} \text{Accumulation} & + & \text{Flux sortant} & = & \text{Source} \\ & & - \text{Flux entrant} & & \end{array} \quad (2.19)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV + \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} \, dV + \iint_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (2.21)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV + \iint_S \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \dot{W} + \dot{Q} \quad (2.22)$$

Pour détailler plus avant les équations de conservation dans un fluide, il nous manque l'expression des forces extérieures $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ agissant sur le fluide, ainsi que la puissance thermique \dot{Q} .

Le prochain chapitre décrit l'ensemble des forces (les plus classiques) exercées sur le fluide.

Chapitre 3

Forces exercées sur un fluide

3.1 Introduction

Nous considérons toujours un volume de fluide V eulérien.

Il est d'usage de distinguer deux types de forces dans les milieux continus :

- les **forces volumiques** qui s'exercent sur chaque particule fluide interne au volume V .
- les **forces surfaciques ou de contact** qui s'exercent sur la frontière S du volume V .

3.2 Force volumiques

Pour un fluide, en voici une liste possible :

- le poids
- les pseudo-forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis en référentiel non-galiléen (importantes pour les mouvements de l'atmosphère par exemple).
- les forces électriques et magnétiques pour les fluides chargés (suspensions de particules magnétiques, magma) ¹.

Nous nous limiterons ici au poids. Exprimons le poids du volume de fluide V : chaque volume élémentaire dV a pour poids $\rho \mathbf{g} dV$ de telle sorte que le poids du volume V s'exprime par :

$$\mathcal{P} = \iiint_V \rho \mathbf{g} dV \quad (3.1)$$

¹Cette discipline complexe porte le nom de “magnétohydrodynamique”

On notera que ρ et \mathbf{g} ne peuvent être sortis de l'intégrale dans le cas le plus général : ρ parce que le fluide peut présenter des variations de masse volumique, et \mathbf{g} parce qu'à l'échelle d'un océan ou de l'atmosphère, \mathbf{g} ne garde pas une direction constante.

3.3 Forces de contact : pression

3.3.1 Origine microscopique.

Nous avons mentionné en introduction le caractère granulaire des fluides à l'échelle microscopique, et le fait que ces “grains” sont en perpétuel mouvement les uns par rapport aux autres.

Supposons que le fluide est limité par une paroi solide (par exemple celle d'un récipient). A chaque instant, certaines des molécules du fluide, dans leur mouvement désordonné, vont aller taper et rebondir sur cette paroi (imaginez une multitude de balles lancées aléatoirement dans un gymnase) (Fig. 3.1).

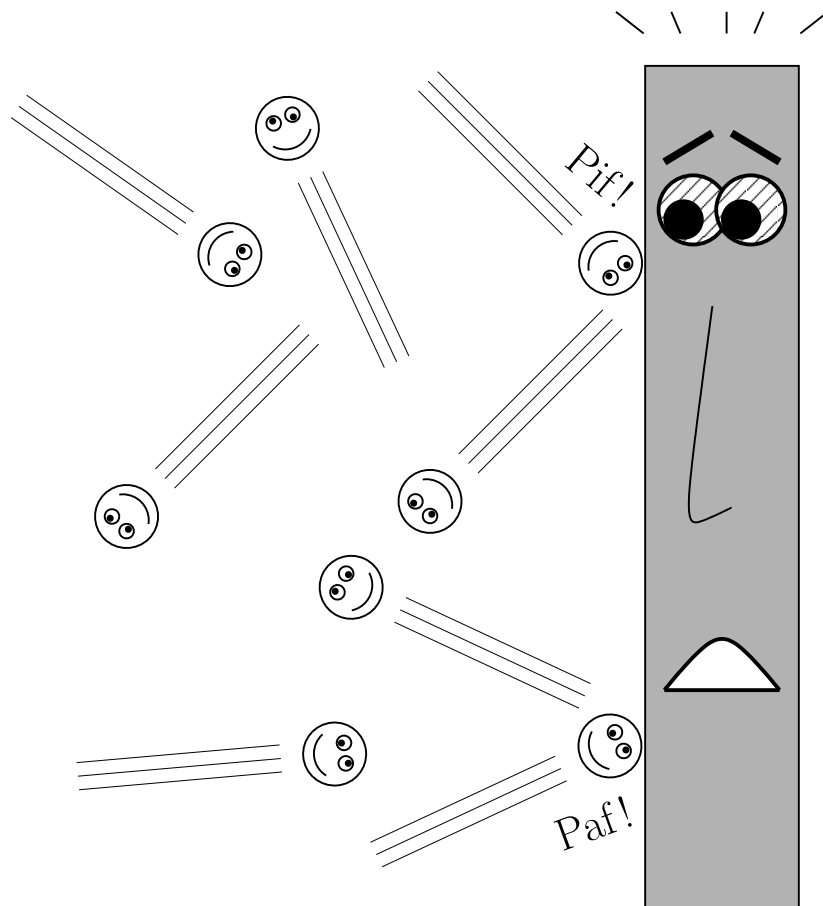


FIG. 3.1 – Choc de molécules d'un fluide sur une paroi solide.

Lors de ce rebond, conformément aux lois de Newton, la molécule échange de la

quantité de mouvement avec la paroi, et exerce donc sur cette dernière une force proportionnelle à {sa quantité de mouvement avant le choc $\mu\mathbf{v}_1$ } - {celle après le choc $\mu\mathbf{v}'_1$ }. On voit sur la figure 3.2 que cette force est perpendiculaire à la paroi et dirigée vers son intérieur.

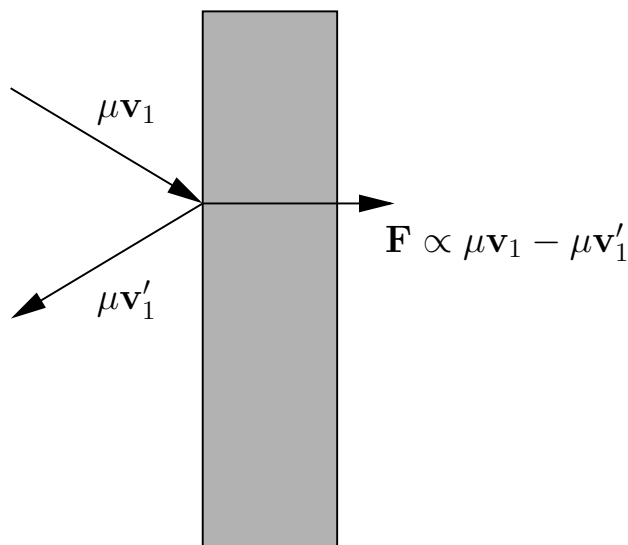


FIG. 3.2 – Echange de quantité de mouvement lors du choc d’une molécule de fluide de masse μ sur une paroi solide.

La force moyenne qu’exerce le fluide sur la paroi, obtenue en comptant tous les chocs de molécules par unité de temps² est donc également normale à la paroi et dirigée vers son intérieur. Cette force est une **force de pression**.

Il est bien évident que le nombre de chocs subi est proportionnel à la surface de la paroi. Si l’on considère une surface deux fois plus petite, le nombre de chocs, et donc la force résultante, seront également deux fois plus petits. La force de pression est donc proportionnelle à la surface considérée. Il est donc commode dans ces conditions de définir une force par unité de surface appelée **pression** (l’unité S.I. est le Pascal : $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$). Comme l’orientation de cette force est parfaitement définie (normale et rentrante dans le système subissant la force de la part du fluide), un scalaire p suffit pour la définir.

Quotidiennement, notre corps subit les mêmes chocs que la malheureuse paroi de la figure 3.1 de la part des molécules d’air environnant. La pression correspondante, dite pression atmosphérique est égale à 101325 Pa, ce qui correspond grossomodo à une masse de 1 kg/cm² !

Sur les figures 3.1 et 3.2, rien n’empêche de considérer autre chose qu’une paroi solide : on peut aussi bien considérer un volume de fluide identique ou non à celui qui exerce la force. Les molécules du fluide de gauche exerceront les mêmes chocs sur le fluide de droite, et donc la même pression. Il est donc possible de la pression en un point dans un fluide. Nous allons éclaircir cette notion dans la section suivante.

²Un calcul approché simple peut être effectué pour un gaz parfait, et fournit l’équation d’état des gaz parfaits.

3.3.2 Équilibre d'une colonne d'eau.

Imaginons 3 cylindres de liquide immobiles empilés les uns sur les autres (Fig. 3.3), que nous nommerons 1, 2 et 3. Le dessus du cylindre 1 est soumis à la pression atmosphérique p_{atm} . Nous allons considérer l'équilibre du cylindre du milieu, pour l'instant *seulement dans la direction verticale*. Il est soumis à son propre poids, à une force de pression $\mathbf{F}_{1/2}$ de la part du cylindre 1 et d'une force de pression verticale $\mathbf{F}_{3/2}$ de la part du cylindre 3. L'équilibre s'écrit donc :

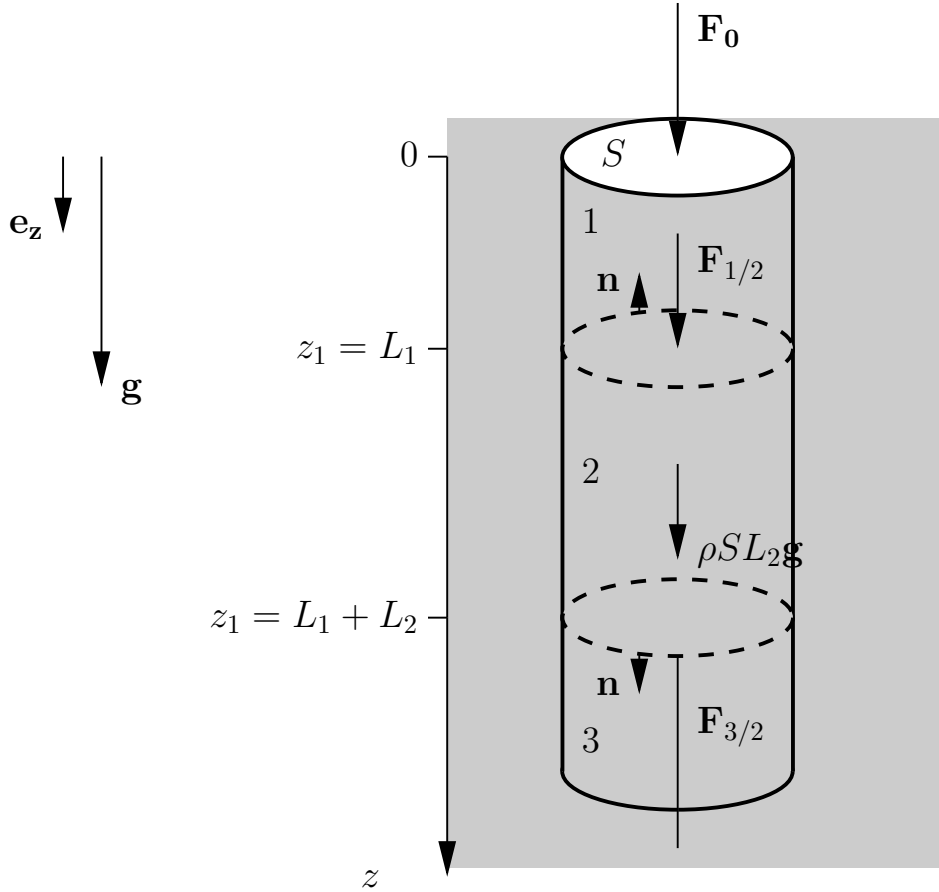


FIG. 3.3 – Équilibre d'un cylindre de fluide.

$$M_2 \mathbf{g} + \mathbf{F}_{1/2} + \mathbf{F}_{3/2} = \mathbf{0}$$

Considérons maintenant l'équilibre du cylindre 1 : il est soumis à son poids, à la force de pression \mathbf{F}_0 exercée par la pression atmosphérique et à la force $-\mathbf{F}_{1/2}$ de la part du cylindre 2, d'après la loi de l'action et de la réaction. Son équilibre s'écrit donc :

$$M_1 \mathbf{g} - \mathbf{F}_{1/2} + \mathbf{F}_0 = \mathbf{0}$$

De ces deux équations, et en remarquant que $\mathbf{F}_{3/2} = -\mathbf{F}_{2/3}$, nous déduisons les forces $\mathbf{F}_{1/2}$ et $\mathbf{F}_{3/2}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{1/2} &= \mathbf{F}_0 + M_1 \mathbf{g} \\ \mathbf{F}_{2/3} &= \mathbf{F}_0 + (M_1 + M_2) \mathbf{g}\end{aligned}$$

ce qui montre que chaque cylindre subit de la part de son supérieur une force égale au poids de toute la colonne le surplombant + la force exercée par l'extérieur sur le cylindre 1 qui se transmet dans toute la colonne.

De plus, appelons S la section des cylindres, ρ la masse volumique du fluide, et L_1 , L_2 , L_3 leurs longueurs respectives. Les deux équations d'équilibres précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{F}_{1/2}}{S} &= \frac{\mathbf{F}_0}{S} + \rho L_1 \mathbf{g} \\ \frac{\mathbf{F}_{2/3}}{S} &= \frac{\mathbf{F}_0}{S} + \rho(L_1 + L_2) \mathbf{g}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Mais la force \mathbf{F}_0 exercée par l'atmosphère est liée aux chocs des molécules d'air sur la surface supérieure du cylindre 1, et c'est donc une force de pression, proportionnelle à la surface S et orientée vers le bas. On peut donc l'écrire sous la forme $\mathbf{F}_0 = p_{\text{atm}} S \mathbf{e}_z$. Les équations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{F}_{1/2}}{S} &= p_{\text{atm}} \mathbf{e}_z + \rho L_1 \mathbf{g} \\ \frac{\mathbf{F}_{2/3}}{S} &= p_{\text{atm}} \mathbf{e}_z + \rho(L_1 + L_2) \mathbf{g}\end{aligned}\tag{3.3}$$

Ces expressions montrent clairement que si on double ou décuple la section des cylindres, les forces changent certes dans le même rapport, *mais pas le rapport F/S !*. Les forces $\mathbf{F}_{1/2}$ et $\mathbf{F}_{2/3}$ sont aussi des forces de pression : elle peuvent ainsi s'exprimer comme le produit de la pression p locale par la section de contact. On voit de plus d'après les expressions (3.3) que l'amplitude de la force exercée sur la surface supérieure d'un cylindre quelconque ne dépend que de la profondeur z de cette surface ($z = L_1$ pour le cylindre 2, $z = L_1 + L_2$ pour le cylindre 3). La pression ne dépend donc que de la profondeur et l'on peut écrire les formules (3.3) dans une formule unique :

$$p(z) = p_{\text{atm}} + \rho g z\tag{3.4}$$

en prenant l'axe z orienté dans le sens de la pesanteur et le zéro au niveau de la surface. Ce résultat est classique, il indique que la pression augmente avec la profondeur dans un fluide immobile. Nous retrouverons ce résultat plus généralement ci-dessous.

3.3.3 Généralisation.

Nous allons récapituler dans une formule ce que nous avons appris dans les sections précédentes : la force de pression exercée sur un système est :

- proportionnelle à la surface
- normale à la surface
- orientée vers l'intérieur du système

Considérons donc un volume V quelconque de fluide immobile entouré du même fluide (Fig. 3.4). Sur chaque élément dS de la frontière de V , le fluide extérieur applique une force normale rentrant dans le volume V , définie par la pression p locale (dépendant donc de x , y et z) :

On définit la force de pression sur un élément de surface dS par

$$d\mathbf{F} = -p\mathbf{n} dS \quad (3.5)$$

et donc, pour la surface S toute entière :

$$\mathbf{F} = \iint_S -p\mathbf{n} dS \quad (3.6)$$

Rappelons que l'unité S.I. pour la pression est le **Pascal** égal à un N/m^2 . La pression atmosphérique au niveau du sol vaut 101325 Pa , unité appelée aussi atmosphère. Le Pascal est donc une unité très petite. Le **bar**, unité de pression dans le système CGS vaut 10^5 Pa (d'où les fameux 1013 mbar de la météo), soit environ une atmosphère.

Le **psi** (Pound per Square Inch) est égal à une livre par pouce-carré, soit $0.4536 \text{ kg} / (2.54 \times 10^{-2} \text{ m})^2 \simeq 6897 \text{ Pa}$. On pourra retenir que $1 \text{ bar} \simeq 14.5 \text{ psi}$ (vérifiez lorsque vous gonflerez les pneus de votre voiture :-). On ajoute généralement une lettre au symbole psi selon ce que l'on mesure :

- **psia** représente une pression absolue (p)
- **psig** représente une pression relative par rapport à la pression atmosphérique ($p - p_{\text{atm}}$)
- **psid** représente une pression différentielle entre deux points ($p_2 - p_1$)

On trouve également des unités liées à des hauteurs équivalentes de liquide (voir ci-dessous). Le **torr**, ou mm de mercure est la pression exercée par une colonne d'un millimètre de mercure. Il vaut 133.32 Pa, et on retiendra que 1 atmosphère vaut 760 mm Hg ou 760 torr. Le torr est bien adapté aux systèmes sous vide.

3.3.4 Loi de l'hydrostatique.

Nous connaissons maintenant les deux forces exercées sur un fluide immobile : le poids et les forces de pression. Donc :

L'équilibre mécanique d'un volume V de fluide immobile s'écrit :

$$\iiint_V \rho \mathbf{g} dV + \iint_S -p \mathbf{n} dS = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

La figure 3.4 illustre cette équation : pour que la résultante des forces de pression équilibre le poids, la pression doit être plus élevée dans les parties basses que dans les parties hautes, ce que nous avons démontré pour la colonne de liquide : la pression augmente avec la profondeur.

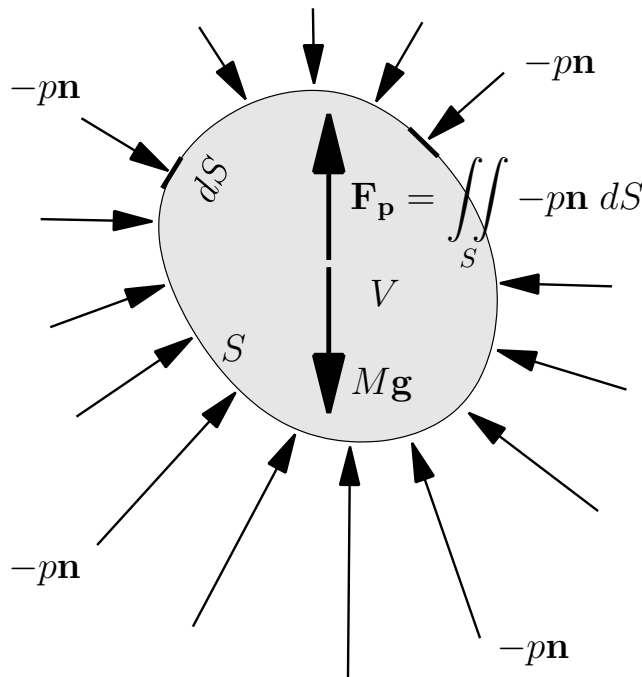


FIG. 3.4 – Équilibre d'un volume de fluide : la résultante des forces de pression contrebalance le poids.

Pour mieux quantifier ce résultat, utilisons la formule du gradient (B.2) pour transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume. Nous obtenons :

$$\iiint_V \rho \mathbf{g} \, dV + \iiint_V (-\mathbf{grad} \, p) \, dV = \mathbf{0}$$

qui doit être vraie pour tout volume V en équilibre, et par conséquent :

En tout point d'un fluide immobile, on a :

$$\rho \mathbf{g} - \mathbf{grad} \, p = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

appelée **loi de l'hydrostatique**.

Une propriété du gradient bien connue est qu'il est orthogonal aux surfaces équivalents, c'est-à-dire que $f(x, y, z)$ est constant lorsque l'on se déplace perpendiculairement à $\mathbf{grad} \, f$. Nous voyons donc que :

Les surfaces isobares dans un fluide au repos sont perpendiculaires à \mathbf{g} .

Ce sont donc des surfaces sphériques à l'échelle de la terre (si on oublie les défauts locaux de \mathbf{g}) et des plans horizontaux à l'échelle humaine. Nous allons spécifier deux applications pratiques.

3.3.5 Applications.

3.3.5.1 Variation de la pression avec la profondeur de liquide

Prenons un axe Oz , orienté vers le bas (dans le sens de \mathbf{g}), et l'origine à la surface du liquide. L'équation (3.8) se décompose alors en trois équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \end{cases}$$

et nous obtenons alors, en supposant le liquide incompressible ($\rho = C^{\text{te}}$) :

$$p(z) = p_{\text{atm}} + \rho g z$$

On retrouve le résultat obtenu pour une colonne de fluide. Avec $p_{\text{atm}} = 101300 \text{ Pa}$, et $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$, on voit que la pression augmente environ de p_{atm} tous les 10 mètres.

3.3.5.2 Pression dans l'atmosphère

Prenons maintenant l'axe Oz vers le haut, et l'origine au niveau de la mer. L'équation de l'hydrostatique s'écrit maintenant :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(z)g$$

où nous avons écrit $\rho(z)$ car l'air est compressible et les variations de ρ ne peuvent être négligées dans l'intégration. Celles sont données par la loi des gaz parfaits :

$$p = \rho \frac{R}{M_a} T$$

où $M_a = 28.8 \text{ g/mol}$ est la masse molaire de l'air, et $R = 8.32 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Si nous considérons $T = T_0$ constant avec l'altitude, on peut intégrer l'équation de l'hydrostatique en :

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{M_a g}{RT_0} z\right)$$

En réalité, jusqu'à 11000 m d'altitude (troposphère), la température diminue avec l'altitude, selon une loi approximativement linéaire (si vous avez déjà pris l'avion, vous avez probablement été surpris en entendant le pilote annoncer une température extérieure de l'ordre de $-40^\circ\text{C} \dots$). Ainsi, nous avons :

$$T(z) = T_0 - Bz$$

avec $B \simeq 6.5 \times 10^{-3} \text{ K/m}$. L'utilisation de cette loi fournit alors, après intégration :

$$p = p_0 \left(1 - \frac{Bz}{T_0}\right)^{M_a g / RB}$$

3.3.6 Extension en référentiel non galiléen.

Examinons le cas où le fluide est immobile dans un référentiel non galiléen que nous nommerons \mathcal{R}' . Cela se produit notamment dans des cuves tournantes (miroir liquide), ou par exemple dans un véhicule en accélération.

Puisque le liquide est immobile dans \mathcal{R}' , il ne subit que la force d'inertie d'entraînement, celle de Coriolis étant nulle (cf. annexe C). La force d'inertie d'entraînement

sur un élément de volume dV s'écrit $-\rho dV \mathbf{a}_e$ et il est facile de voir que la loi de l'hydrostatique se généralise en :

$$\rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}_e) - \mathbf{grad} p = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Nous voyons donc que :

Dans un référentiel non galiléen \mathcal{R}' , d'accélération \mathbf{a}_e par rapport à un référentiel galiléen, la loi de l'hydrostatique s'écrit de façon identique, à condition de remplacer \mathbf{g} par une pesanteur "apparente" $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}_e$.

Les surfaces isobares deviennent normales à \mathbf{g}' . Ce seront par exemple des plans inclinés dans une voiture en accélération constante, et des paraboles dans les référentiels tournants. Ce résultat est mis à profit pour construire naturellement des miroirs liquides parfaitement paraboliques à partir de cuves de mercure en rotation.

3.3.7 Poussée d'Archimède.

Nous avons évalué la force de pression résultante sur un volume V de fluide immobile, montré qu'elle était dirigée **vers le haut** et que puisqu'il y a équilibre, elle est l'opposée du poids du fluide.

Que se passe-t-il si l'on remplace ce volume fluide V par un corps étranger (bulle, goutte, corps solide) ? Tant que le fluide est immobile, *le champ de pression dans le fluide reste le même* ($p = p_{\text{atm}} + \rho g z$). Les forces de pression sur la surface S sont donc les mêmes (celles de la figure 3.4), que V contienne du fluide ou toute autre matière et leur résultante est donc l'opposée du poids du fluide qui remplirait ce volume V ! D'où le célèbre principe :

Tout corps plongé dans un liquide subit une poussée de bas en haut égale au poids du liquide déplacé (c'est-à-dire du fluide qui remplacerait le corps si ce dernier était absent).

Dans le cas le plus courant où la masse volumique *du fluide* ρ peut être considérée constante (et si \mathbf{g} uniforme), on obtient :

$$\mathbf{F}_a = -\rho V \mathbf{g} \quad (3.10)$$

Cette force est appelée *force* ou *poussée d'Archimède*^a. On retiendra qu'elle est toujours opposée au champ de pesanteur \mathbf{g} (apparent \mathbf{g}' dans le cas d'un référentiel non galiléen).

^aArchimède (287 av. JC - 212 av. JC) : sans doute le plus grand scientifique de l'antiquité. Outre le fameux principe, qu'il aurait découvert en prenant son bain (et le Eurêka consécutif...), on lui doit de nombreuses inventions comme le levier, ou la vis sans fin (qui porte son nom). Il inventa de nombreuses machines de guerre pour défendre Syracuse. Il fut également prolifique dans le domaine des mathématiques : on lui doit notamment la spirale et des estimations assez précises de π . Il fut tué par un soldat romain qui ignorait qui il était.

Applications : le corps étranger occupant V est soumis également à son poids $\rho_s V \mathbf{g}$, où ρ_s est la masse volumique du corps. La résultante de son poids et de la poussée d'Archimède est donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_a + \mathcal{P} &= (\rho_s - \rho)V \mathbf{g} \\ &= (d - 1)\rho V \mathbf{g} \end{aligned}$$

où $d = \rho_s / \rho$ est un nombre sans dimension, qu'on appelle **densité** lorsque le fluide est de l'eau ($\rho = 998 \text{ kg.m}^{-3}$). La force nette est donc vers le haut si le corps est plus léger que le fluide ($d < 1$), et vers le bas s'il est plus lourd ($d > 1$). On peut aussi interpréter cette formule comme si le corps avait une masse modifiée $(d - 1)\rho V$. C'est ainsi que l'on se sent "plus léger" dans l'eau (le corps humain a une densité moyenne de l'ordre de 1.07)

La plupart des bois sont plus légers que l'eau et donc y flottent. L'ébène ($d=1.1$) et le chêne rouge d'Australie ($d=1.32$) sont plus lourds que l'eau (et donc coulent), et l'if a une densité de 1.

L'eau de mer et le lait ont une densité de 1.03 (on flotte mieux dans l'eau de mer), le vin de 1.01 (on y flotterait légèrement mieux aussi :-), et le pétrole de 0.8 (c'est pourquoi on ne doit pas jeter de l'eau pour éteindre un feu d'hydrocarbure, car celui-ci flotte et la masse enflammée se répand encore plus vite).

Remarquons enfin que nous subissons également une poussée d'Archimède dans l'air, et la pression au niveau de nos jambes est effectivement plus élevée que celle au niveau de notre tête. Mais cette poussée est très faible devant notre poids en raison de la faible masse volumique de l'air.

3.3.8 Moment des forces de pression.

Le moment d'une force de surface, notamment celle de pression, est obtenu en sommant toutes les contributions de moments élémentaires sur chaque élément de surface. Ainsi le moment en un point A des forces de pression s'écrira :

$$\mathcal{M}_A(\mathbf{F}_p) = \iint_S \mathbf{AM} \wedge -p\mathbf{n} dS \quad (3.11)$$

Le calcul des moments est important par exemple pour les études de stabilité de barrage, de corps flottants, de bateaux On peut ainsi définir le **centre de poussée** C par :

$$\iint_S \mathbf{CM} \wedge -p\mathbf{n} dS = 0 \quad (3.12)$$

Par un raisonnement analogue au précédent, il est facile de montrer que :

Le centre de poussée de la force d'Archimède exercée sur un corps est le centre de gravité du fluide déplacé.

Ainsi si le corps est homogène et totalement immergé, centre de poussée et centre de gravité du corps sont confondus. En revanche, si le corps a une partie émergée (notamment les bateaux) ce n'est plus le cas, et la stabilité du corps vis-à-vis de la rotation n'est plus assurée.

3.4 Forces de contact : frottement visqueux.

3.4.1 Mise en évidence : expérience de Couette.

Lorsque le fluide est en mouvement, on constate expérimentalement qu'il apparaît également une **force tangentielle**, en plus des forces de pression. L'expérience la plus simple permettant de le constater est l'écoulement de Couette (Fig. 3.5) : un canal contenant du fluide initialement immobile est équipée d'une paroi supérieure mobile. Lorsque l'on anime cette dernière d'un mouvement horizontal uniforme à la vitesse U_0 on constate que :

- le fluide est entraîné par la plaque, avec une vitesse horizontale
- la plaque subit une force tangentielle \mathbf{F} opposée au mouvement.

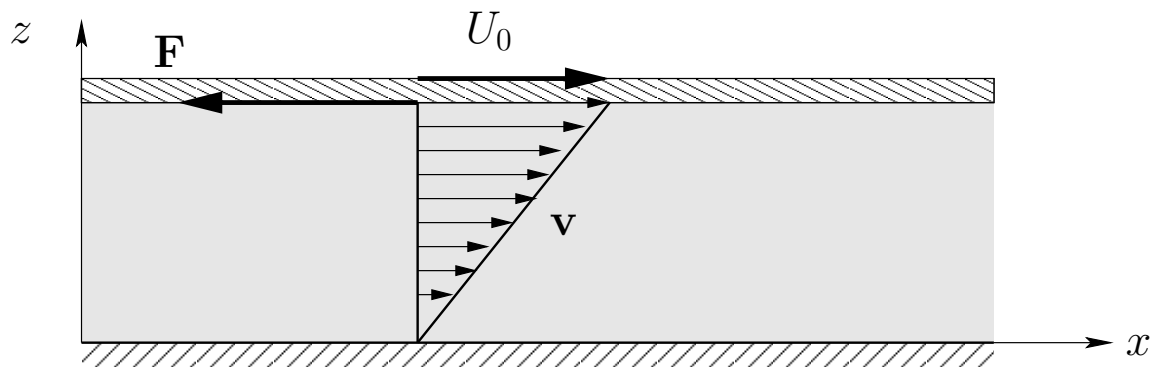


FIG. 3.5 – Expérience de Couette : la plaque supérieure entraîne le fluide à cause des frottements visqueux. Le profil de vitesse est linéaire en régime permanent.

Au bout d'un temps suffisamment long, la vitesse du fluide devient constante au cours du temps (on est en régime permanent) et on constate qu'elle varie linéairement de 0 à U_0 dans l'épaisseur du fluide.

On peut conclure de cette expérience que :

- la plaque “adhère au fluide” puisqu'elle l'entraîne dans son mouvement.
- les couches horizontales de fluide frottent l'une sur l'autre puisque le mouvement se transmet de la plaque vers les couches plus basses. Cela signifie que chaque “lame” horizontale subit une **force tangentielle** de la part de ses voisines. Cette force tangentielle est appelée **cisaillement** ³.

Autrement dit cette expérience simple ⁴ démontre l'existence d'une force tangentielle dans un fluide en mouvement causée par le frottement des couches fluides entre elles. On montre que la force par unité de surface est **proportionnelle au gradient de vitesse** dans la hauteur de l'écoulement :

$$\frac{\mathbf{F}_v}{S} = -\mu \frac{dv_x}{dz} \mathbf{e}_x$$

3.4.2 La viscosité.

Le coefficient de proportionnalité μ est un paramètre physique du fluide appelé **viscosité dynamique**. Son unité S.I. est le Pa.s ou bien le $\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$, appelé aussi **Poiseuille**⁵ et noté Pl. Son unité dans le système CGS s'appelle le **Poise** et est

³Le cisaillement existe aussi dans les solides, par exemple lorsque l'on déplace une surface du solide parallèlement à elle-même. A l'inverse d'un fluide, qui coule lorsqu'il est soumis à du cisaillement externe, un solide tente de reprendre sa forme initiale par une force élastique.

⁴On peut la réaliser grossièrement dans une baignoire en posant la main à plat à la surface de l'eau et en décrivant un mouvement circulaire. On sent au bout d'un certain temps que le fluide en profondeur s'anime lui aussi d'un mouvement de rotation

⁵Jean-Louis Marie Poiseuille (1797-1869) : d'abord élève de polytechnique, il étudie ensuite la médecine. Ses recherches mélangent lois physiques et physiologie, et il étudie notamment l'hémo-

noté Po. On vérifiera que $1 \text{ Pl} = 10 \text{ Po}$. La viscosité de l'eau à température et pression ambiante vaut 10^{-3} Pl , et celle de l'air $1.85 \cdot 10^{-5} \text{ Pl}$. **La viscosité de l'eau vaut donc un CentiPoise (cPo)**, et c'est pourquoi cette dernière unité est très populaire.

La viscosité varie notablement avec la température. Elle augmente avec T dans le cas d'un gaz et diminue dans le cas d'un liquide (vous pourrez vérifier en regardant comment coule l'huile dans une poêle chaude par rapport à une froide). La viscosité des liquides augmente également avec la pression, celle des gaz y est peu sensible.

3.4.3 Origine microscopique.

Dans l'expérience précédente, nous voyons des filets de fluides qui se déplacent horizontalement, aucun mouvement vertical n'est visible. Cependant à l'échelle microscopique les molécules se déplacent en tous sens, en plus du mouvement d'ensemble (voir Fig. 3.1). Sur la figure 3.5, une partie des molécules "hautes" et donc rapides vient faire un tour vers le bas. Ce faisant elles choquent les molécules plus lentes et leur transfère de la quantité de mouvement. Réciproquement les molécules basses et lentes vont faire des incursions vers le haut et récupèrent de la quantité de mouvement en choquant des molécules plus rapides. C'est ainsi que le déplacement de la paroi supérieure finit par être "ressenti" par les molécules du bas : de la quantité de mouvement est transférée dans l'épaisseur du fluide par l'agitation microscopique. Notons que ce mouvement vertical des molécules est à moyenne nulle, et donc invisible à l'échelle macroscopique.

3.4.4 Le nombre de Reynolds.

Nous verrons ultérieurement que la prise en compte des forces visqueuses introduit une complexité supplémentaire dans les équations du mouvement du fluide. C'est pourquoi il est pertinent de se demander dans quelle mesure on peut les négliger, en ne considérant que les forces de pression. L'expérience montre par exemple que pour un écoulement externe (fluide s'écoulant autour d'un obstacle) les effets de la viscosité sont concentrés dans une fine couche près des parois solides, appelée **couche limite**⁶. Ceci est vrai pourvu que l'écoulement ait une vitesse suffisante et que la viscosité soit suffisamment faible.

En fait, l'épaisseur de la couche limite dépend d'un nombre adimensionnel, appelé

dynamique (la circulation sanguine). Dans la lignée de ces travaux, il étudie le mouvement d'un fluide dans des tubes capillaires, et écrit la fameuse loi de Hagen-Poiseuille (Hagen découvrit la même loi indépendamment), formulée plus rigoureusement un peu plus tard. Cette loi indique que le débit dans un tube est proportionnel à son diamètre, à la différence de pression entre l'entrée et la sortie, et inversement proportionnel à la viscosité du fluide (voir aussi section sur les pertes de charge).

⁶ainsi que, dans une moindre mesure, dans le **sillage** qui est la zone d'écoulement prolongeant la couche limite en aval de l'obstacle

nombre de Reynolds⁷, fondamental en mécanique des fluides :

Le nombre de Reynolds est défini par :

$$\text{Re} = \frac{\rho L v}{\mu} \quad (3.13)$$

C'est une donnée fondamentale d'un écoulement.

Dans cette définition, L est une longueur caractéristique de l'écoulement (taille d'un obstacle, d'un récipient, diamètre d'un tuyau, épaisseur d'une couche de fluide), v est une vitesse caractéristique de l'écoulement. Le Reynolds Re peut être interprété (entre autres) comme le rapport de l'énergie cinétique et du travail des forces visqueuses.

Pour illustrer l'importance de ce nombre, la figure 3.6 présente l'écoulement autour d'un cylindre pour 4 Reynolds différents (1.5, 26, 200 et 8000, respectivement, de gauche à droite et de haut en bas). On voit que l'écoulement, au départ symétrique ($\text{Re}=1.5$), présente ensuite une dissymétrie amont-aval ($\text{Re} = 26$) et des re-circulations. Pour $\text{Re} = 200$, l'écoulement se déstabilise et devient instationnaire (au départ périodique), formant des tourbillons se détachant du cylindre alternativement de chaque côté⁸. Enfin pour $\text{Re} = 8000$, l'écoulement dans le sillage présente des mouvements erratiques, c'est l'apparition de la turbulence.

De façon générale, lorsque le Reynolds est très petit devant 1, les effets visqueux sont importants dans tout l'écoulement, c'est le cas par exemple des écoulements ou bien très visqueux (huiles, goudron, pâtes, plastique, miel), à très faible vitesse (glaciers, manteau terrestre) ou d'objets microscopiques (bactéries, suspensions de particules). Dans ce cas les forces visqueuses jouent un rôle décisif dans l'écoulement et ne peuvent être négligées.

A l'inverse lorsque le nombre de Reynolds est très grand devant 1, et dans le cas d'un écoulement externe (autour d'un objet, d'un véhicule...) les forces visqueuses seront concentrées au voisinage des parois solides et pourront être négligées hors de cette zone. Dans le cas des écoulements internes, cela est moins clair comme en témoigne clairement l'expérience de Couette : nous avons vu que le frottement

⁷Osborne Reynolds (1842-1912) : sa contribution majeure fut en hydrodynamique à partir de 1873. Il établit par une expérience célèbre les conditions de transitions d'un écoulement laminaire vers un écoulement turbulent. En 1886, il propose une théorie de la lubrification (écoulements du fluide visqueux dans un espace de petites dimensions dans la direction perpendiculaire à l'écoulement). Trois ans plus tard, il produit le premier modèle mathématique de la turbulence, dont les grands principes ont peu varié depuis (en particulier le fameux tenseur de Reynolds). Il fut le second enseignant en ingénierie d'Angleterre et possédait de fermes convictions quant à l'enseignement de cette discipline : tout ingénieur, quel que soit son domaine, devait selon lui avoir une bonne connaissance des mathématiques, de la physique et de la mécanique classique...

⁸la photo est prise de plus loin pour visualiser l'extension spatiale des tourbillons. Cette structure est appelée "allée de tourbillons de Von Karman".

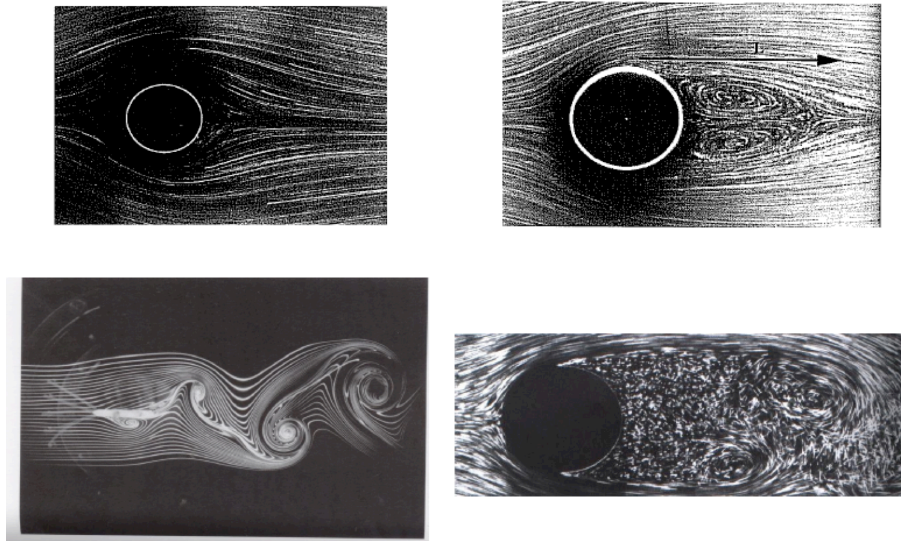


FIG. 3.6 – Écoulement autour d'un cylindre pour des Reynolds de 1.5, 26, 200 et 8000, de gauche à droite et de haut en bas (d'après Guyon et al., 2001)

visqueux était dans ce cas le moteur du mouvement, et il serait paradoxal de négliger ces frottements, aussi faibles fussent-ils !

Pour des écoulements en conduite, le frottement sur les parois du tuyau conduisent à une perte d'énergie mécanique du fluide, ce qui se traduit, pour une tuyauterie de section constante, à une chute de pression dans le sens de l'écoulement. De même, les singularités de la conduite, comme par exemple, un changement brusque de diamètre, un coude, une fente... favorisent localement la dissipation d'énergie par dissipation visqueuse et conduisent à une perte d'énergie mécanique. Cette perte est appelée **perte de charge**, et sera abordée dans la section 5.4.2. Comme nous le verrons, le modèle du fluide parfait fournit malgré tout un résultat remarquablement simple, à travers la célèbre formule de Bernoulli, que l'on peut corriger a posteriori pour prendre en compte les pertes de charge.

3.4.5 Le modèle de fluide parfait.

Le modèle de fluide parfait consiste à négliger l'action des forces visqueuses dans le fluide.

Il s'agit d'un modèle. En réalité, tous les fluides sont visqueux ^a.

Il sous-entend un mouvement du fluide non dissipatif.

^aSauf l'hélium superfluide, peu courant en génie des procédés!!

Nous verrons en effet que le modèle de fluide parfait est associé à la conservation de l'énergie totale (cinétique + potentielle) à la manière d'un bille roulant sans frottement sur une glissière. Un fluide parfait, s'il ne subissait aucune force extérieure, coulerait indéfiniment une fois mis en mouvement. Ainsi, ce modèle prédit les comportements suivants :

- un bateau ayant reçu une impulsion de démarrage pourrait traverser l'océan sans moteur ⁹ ;
- un planeur planerait indéfiniment même sans courant ascendant ;
- un fluide une fois mis en mouvement dans un tube horizontal pourrait s'écouler sur des milliers de kilomètres ;
- les vagues, le son ne s'amortiraient pas.

Il convient de garder ces exemples à l'esprit lorsque l'on veut faire usage du modèle de fluide parfait, mais il ne faut pas non plus penser que le fluide parfait est un concept inutile. Nous verrons dans la première partie de ce cours un grand nombre d'applications de ce modèle, rendues possibles par la simplification drastique des équations du mouvement. Citons un exemple historique : le modèle de fluide parfait a permis notamment de calculer de façon analytique les forces de portances des ailes d'avion.

Le problème est qu'il est difficile d'établir une règle autorisant ou non son emploi, tout simplement parce que pour un même écoulement, il se justifie ou non selon l'information que l'on cherche à calculer. Ainsi le modèle fluide parfait fournit la portance d'une aile d'avion mais pas sa traînée. Il fournit la vitesse de propagation des vagues ou du son, mais pas leur amortissement. On peut donc énoncer les règles suivantes :

Le modèle de fluide parfait ne peut en aucun cas décrire :

- les mouvements à faible nombre de Reynolds
- les phénomènes dissipatifs, de perte, d'amortissement dans les écoulements.

Enfin, très paradoxalement, il ne peut prédire le phénomène de turbulence, qui pourtant apparaît à très grand nombre de Reynolds ! Plus généralement, la majorité (mais pas tous ¹⁰) des mouvements de fluides tourbillonnaires est provoquée par le frottement visqueux.

⁹Ce n'est pas tout à fait vrai même si on néglige les forces visqueuses car le bateau perd de l'énergie par les vagues qu'il provoque et qui se propagent loin de lui

¹⁰Les mouvements tourbillonnaires de l'atmosphère sont causés par la force de Coriolis. Des variations de concentrations dans des mélanges peut également engendrer des tourbillons.

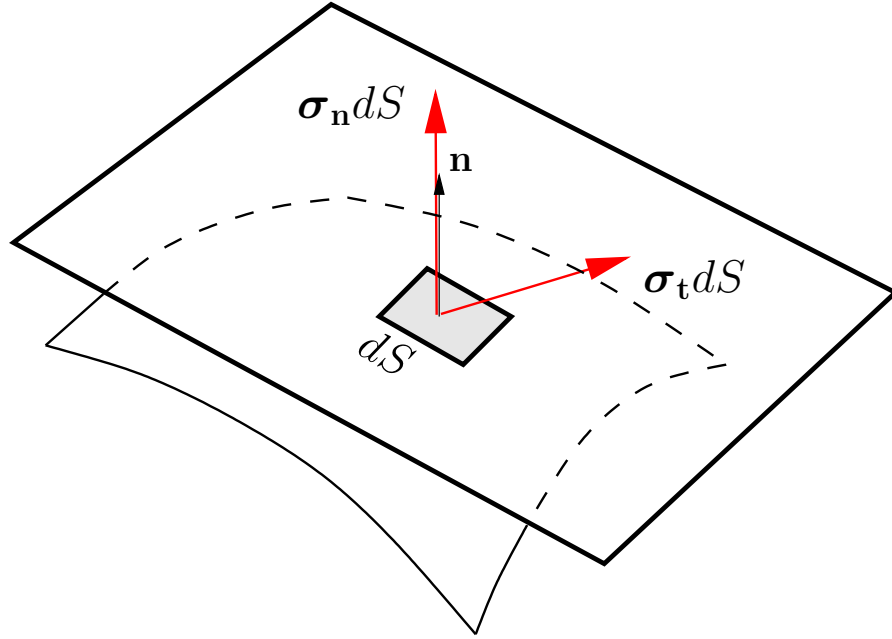


FIG. 3.7 – Contraintes normale et tangentielle.

3.5 Écriture tensorielle des forces de contact

Nous avons vu que tout volume de fluide V est soumis à des forces de contact de la part du fluide environnant, appliquée sur sa frontière S . Sur chaque élément de la surface dS (Fig. 3.7), la force exercée peut être décomposée en une composante normale (de pression) et une composante tangentielle (dite de cisaillement), toutes deux proportionnelles à l'élément de surface ¹¹ :

$$d\mathbf{F} = \sigma_n dS + \sigma_t dS \quad (3.14)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\sigma} = d\mathbf{F}/dS$ est appelée **contrainte** (en N/m^2).

Pour décrire la contrainte en un point de la surface S dans un repère (x, y, z) , il faut connaître ses trois composantes pour toutes les orientations possible du vecteur \mathbf{n} . En fait on montre qu'il suffit de connaître $\boldsymbol{\sigma}$ seulement pour les 3 orientations de \mathbf{n} selon x , y ou z , ce qui fait 9 composantes, que l'on peut organiser en une matrice 3×3 , appelée tenseur des contraintes, et notée :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

¹¹En fait, la compressibilité du fluide engendre aussi une force normale d'origine visqueuse. L'étude détaillée des fluides réels compressibles n'entrant pas dans le cadre de ce cours, nous pourrions retenir contrainte normale = pression, contrainte tangentielle = visqueuse.

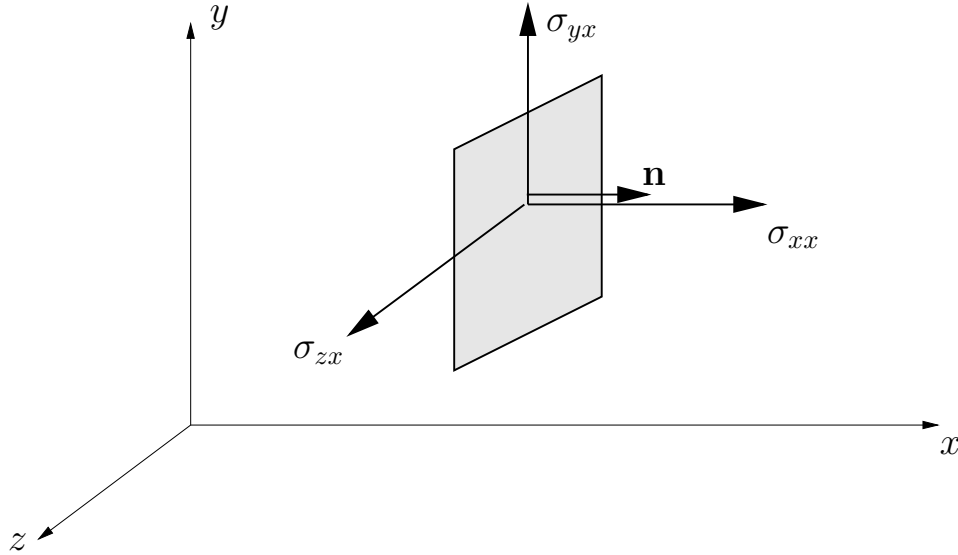


FIG. 3.8 – Illustration des composantes du tenseur des contraintes.

La première colonne est la contrainte lorsque \mathbf{n} est suivant Ox , la seconde lorsque \mathbf{n} est suivant Oy , etc. . . Ou encore, σ_{yx} est la composante suivant Oy de la contrainte sur une surface dont la normale est suivant Ox (cf. Fig. 3.8)

On notera que σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} représentent les contraintes normales et les termes non diagonaux des contraintes tangentiels. Enfin, et c'est l'intérêt de cette formulation, on peut montrer que la contrainte sur un élément de surface de normale \mathbf{n} peut s'écrire simplement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}$$

C'est un produit matrice-vecteur. Dans le cas du fluide, on a pour usage de “sortir” la pression du tenseur des contraintes, et de définir ainsi un tenseur des contraintes $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_v$ uniquement lié à la présence des forces visqueuses. On aura donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = -p\mathbf{n} + \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_v \cdot \mathbf{n} \quad (3.16)$$

En intégrant sur toute la surface S , nous pouvons donc énoncer :

La force de contact exercée sur un volume de fluide V délimité par une surface S s'écrit :

$$\mathbf{F} = \underbrace{\iint_S -p \mathbf{n} \, dS}_{\text{Forces de pression}} + \underbrace{\iint_S \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_v \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\text{Forces visqueuses}} \quad (3.17)$$

Dans le cadre du modèle dit “de fluide parfait”, on néglige la force visqueuse ($\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_v = \overline{\overline{\mathbf{0}}}$).

Chapitre 4

Equations du mouvement d'un fluide

Dans le chapitre, précédent, nous avons dressé la liste des forces agissant sur un fluide, et il nous est maintenant possible de préciser la forme des équations de bilan de quantité de mouvement (2.14), et d'énergie (2.17) en remplaçant $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ par le poids (3.1) + la force de contact (3.17). Nous différons volontairement l'expression de la contribution visqueuse, d'une part pour simplifier l'exposé, et d'autre part pour obtenir un jeu d'équations indépendants du modèle de fluide utilisé.

Nous présenterons dans un premier temps les équations de conservation sous forme de bilan volumique, immédiatement déductible du chapitre 2.4. Ensuite nous présenterons les formes locales de ces équations, sous formes d'équations aux dérivées partielles, traditionnellement exposées dans la plupart des textes de mécanique des fluides. Enfin nous traiterons le cas particulier, mais fondamental des machines fluides, en relation avec le cours de thermodynamique des systèmes ouverts.

4.1 Sous forme de bilans volumiques

4.1.1 Conservation de la masse.

L'équation de conservation de la masse ne contient pas de termes source, et a déjà été présentée à la section 2.4.1 (Eq. 2.13 p. 31).

Il est intéressant de rappeler sa forme, ou bien en régime permanent ($\partial/\partial t = 0$) **mais aussi** pour les fluides incompressibles ($\rho = C^{\text{te}}$) sur lesquels nous reviendrons au chapitre (5). Nous appelons S_e et S_s les surfaces par lesquelles le fluide respectivement entre ou sort :

Conservation de la masse en régime permanent d'un fluide dans un volume V fixe comportant une surface d'entrée S_e et une surface de sortie S_s :

$$\underbrace{\iint_{S_e} -\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\text{Masse entrante}} = \underbrace{\iint_{S_s} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\text{Masse sortante}} \quad (4.1)$$

4.1.2 Conservation de la quantité de mouvement.

Nous conservons pour l'instant les forces de frottement visqueux, l'approximation fluide parfait faisant l'objet du chapitre suivant.

La forme générale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, pour un volume de fluide V fixe dans l'espace, s'écrit :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} \, dV}_{\text{Variation de qdm dans } V} + \underbrace{\iint_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\text{qdm sortante - qdm entrante}} \\ &= \underbrace{\iint_S -p \mathbf{n} \, dS}_{\text{Forces de pression}} + \underbrace{\iiint_V \rho \mathbf{g} \, dV}_{\text{Poids}} \left[+ \underbrace{\iint_S \bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\text{Forces visqueuses}} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ici encore il est intéressant de considérer le cas du régime permanent avec une surface d'entrée S_e et une surface de sortie S_s . On voit clairement que l'intégrale de flux convectif est limitée aux surfaces d'entrée et de sortie. Par ailleurs, l'intégrale des forces de pression s'étend sur une surface fermée et en vertu du théorème de la normale, on peut lui retrancher la constante p_{atm} . On a donc :

$$\iint_{S_e+S_s} (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S -(p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} \, dS + \iint_S \bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n} \, dS + M \mathbf{g} \quad (4.3)$$

L'intérêt de soustraire p_{atm} vient de ce que la pression sur certaines surfaces (latérales ou en sortie) est bien souvent la pression atmosphérique, si bien que les intégrales de pression sur ces surfaces disparaissent de la formulation. La formule ci-dessus est utile en soi dans certains problèmes (notamment les écoulements fluviaux).

Elle a un autre intérêt très important : le calcul des forces exercées par le fluide sur une structure solide avec laquelle elle est en contact. On considère la situation générale représentée figure 4.1 : un volume de fluide est compris entre une surface d'entrée S_e , une surface de sortie S_s , et les parois d'un solide, dont les autres faces sont soumises à la pression atmosphérique. On cherche la force exercée par le fluide sur le solide. En vertu de la loi de l'action et de la réaction, elle s'écrit :

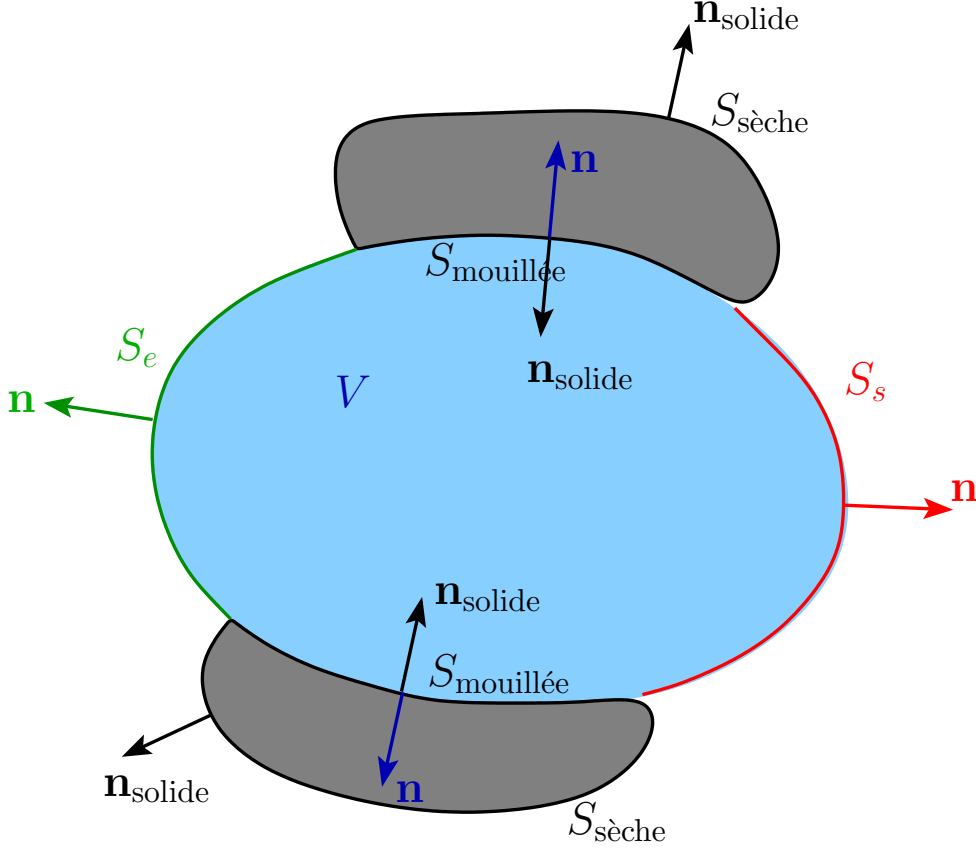


FIG. 4.1 – Fluide en contact avec un solide.

$$\mathbf{F}_{\text{Fluide/Solide}} = -\mathbf{F}_{\text{Solide/Fluide}} = - \left[\iint_{S_{\text{mouillée}}} -p \mathbf{n} \, dS + \iint_{S_{\text{mouillée}}} \overline{\boldsymbol{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n} \, dS \right] \quad (4.4)$$

En générale on s'intéresse à la force totale exercée sur le solide, non seulement celle exercée par le fluide, mais aussi celle exercée par l'atmosphère sur ses parois sèches $S_{\text{sèche}}$. Cette dernière s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{Air/Solide}} = \iint_{S_{\text{sèche}}} -p_{\text{atm}} \mathbf{n}_{\text{solide}} \, dS \quad (4.5)$$

Mais en appliquant le théorème de la normale au solide, on peut écrire :

$$\iint_{S_{\text{sèche}}} -p_{\text{atm}} \mathbf{n}_{\text{solide}} \, dS = \iint_{S_{\text{mouillée}}} p_{\text{atm}} \mathbf{n}_{\text{solide}} \, dS = \iint_{S_{\text{mouillée}}} -p_{\text{atm}} \mathbf{n} \, dS \quad (4.6)$$

où la deuxième égalité résulte de $\mathbf{n}_{\text{solide}} = -\mathbf{n}$ sur $S_{\text{mouillée}}$. Physiquement, la relation ci-dessus signifie que le solide répercute sur le fluide la force de pression qui lui est appliquée par l'air. On en déduit donc la force totale, en sommant (4.4) et (4.5) :

$$\mathbf{F}_{\text{Totale/Solide}} = - \left[\iint_{S_{\text{mouillée}}} -(p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} dS + \iint_{S_{\text{mouillée}}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_v \cdot \mathbf{n} dS \right] \quad (4.7)$$

On utilise maintenant le bilan de quantité de mouvement (4.8), en décomposant les intégrales de pression et de frottement sur $S_e + S_s$ et $S_{\text{mouillée}}$:

$$\begin{aligned} \iint_{S_e + S_s} (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_{S_e + S_s} -(p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} dS + \iint_{S_e + S_s} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_v \cdot \mathbf{n} dS \\ &+ \underbrace{\iint_{S_{\text{mouillée}}} -(p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} dS + \iint_{S_{\text{mouillée}}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_v \cdot \mathbf{n} dS}_{-\mathbf{F}_{\text{Totale/Solide}} \text{ d'après (4.7)}} + M \mathbf{g} \end{aligned} \quad (4.8)$$

On en déduit donc le résultat fondamental :

La force totale exercée sur un solide en contact avec le fluide d'un côté, et l'atmosphère de l'autre s'écrit

$$\mathbf{F}_{\text{Totale/Solide}} = \iint_{S_e + S_s} -(p - p_{\text{atm}}) \mathbf{n} dS + \iint_{S_e + S_s} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_v \cdot \mathbf{n} dS - \iint_{S_e + S_s} (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + M \mathbf{g} \quad (4.9)$$

En général la contribution visqueuse à l'entrée et à la sortie est négligeable.

Cette formule est très pratique car elle ne fait intervenir que les surfaces d'entrée et de sortie, qui sont en général géométriquement simples, de telle sorte que les intégrales sont faciles à calculer.

4.1.3 Conservation de l'énergie.

Pour établir l'équation de conservation de l'énergie d'après (2.17), il nous faut d'abord calculer la puissance des forces extérieures \dot{W} . La puissance est le produit scalaire de la force par la vitesse et il suffit donc d'intégrer toutes les puissances infinitésimales, sur le volume V pour les forces de volume et sur la surface S pour les forces de contact, d'où :

$$\dot{W} = \underbrace{\iiint_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dV}_{\text{Puissance du poids.}} + \underbrace{\iint_S -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS}_{\text{Puissance des forces de pression.}} + \underbrace{\iint_S \mathbf{v} \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_v \cdot \mathbf{n}) \, dS}_{\text{Puissance des forces de frottement visqueux.}} \quad (4.10)$$

La conservation de l'énergie d'un volume de fluide V fixe dans l'espace s'écrit :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV}_{\text{Variation (E interne + E cinétique)}} + \underbrace{\iint_S \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\text{(E interne + E cinétique) sortante - rentrante}} \\ &= \underbrace{\iiint_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dV}_{\text{Puissance du poids}} + \underbrace{\iint_S -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS}_{\text{Puissance des forces de pression}} + \underbrace{\iint_S \mathbf{v} \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_v \cdot \mathbf{n}) \, dS}_{\text{Puissance des forces visqueuses}} + \dot{Q} \quad (4.11) \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\dot{W} \text{ puissance des forces extérieures}} \end{aligned}$$

4.1.4 Complément : théorème de l'énergie cinétique.

Il ne s'agit pas d'un principe de conservation en plus, mais d'une conséquence de la conservation de la quantité de mouvement. Nous démontrons dans l'annexe D que :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \frac{v^2}{2} dV}_{\text{Variation E cinétique}} + \underbrace{\iint_S \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS}_{\text{E cinétique sortante - rentrante}} \\
&= \underbrace{\iiint_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \iint_S -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS + \iint_S \mathbf{v} \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_v \cdot \mathbf{n}) dS}_{\dot{W} \text{ puissance des forces extérieures}} \\
&+ \underbrace{\iiint_V p \operatorname{div} \mathbf{v} dV - \Phi_v}_{\dot{W}_{\text{int}} \text{ puissance des forces intérieures}}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

4.2 Conditions aux limites.

La résolution des équations du mouvement nécessitera la connaissance de la vitesse du fluide sur frontières du domaine. Bien souvent ces limites sont des parois solides ou des interfaces avec d'autres fluides (liquides ou gaz).

Nous ne traiterons que le cas le plus courant des parois solides, qui en aucun cas ne peut être traversé par du fluide (à l'exception des parois poreuses dont nous ne parlerons pas ici). Par conséquent la composante normale de la vitesse du fluide sur une paroi solide est toujours égale à la vitesse normale de cette paroi :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\text{solide}} = \mathbf{v}_{\text{solide}} \cdot \mathbf{n}_{\text{solide}}$$

Cette condition est connue sous le nom de **condition d'étanchéité**.

Dans le cas d'une *paroi fixe*, cette condition devient :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\text{solide}} = 0$$

Concernant la composante tangentielle, comme en témoigne par exemple l'expérience de Couette, la composante tangentielle du fluide est égale à la vitesse tangentielle de la paroi, et donc nulle pour une paroi fixe ¹. En combinant cette condition avec la condition d'étanchéité ci-dessus, on a pour un fluide réel :

¹On pourra s'en convaincre en passant sa main par la vitre d'une voiture et en l'approchant lentement de la portière. On sentira une diminution progressive de la vitesse.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{solide}}$$

Cela est dû au fait qu'une paroi solide est constituée au niveau microscopique de petites aspérités qui interdisent un mouvement d'ensemble des molécules. C'est pour cette même raison que le solide subit une force tangentielle de la part du fluide. Aussi cette condition est-elle liée au caractère visqueux du fluide.

Par contre si l'on néglige ces frottements visqueux, il faut être cohérent et laisser le droit au fluide de glisser librement sur la paroi ! Aussi dans le cadre du modèle de fluide parfait, seule la condition d'étanchéité sera écrite.

On retiendra donc :

La condition sur la vitesse au niveau d'une paroi solide est :

– pour le modèle de fluide parfait,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\text{solide}} = \mathbf{v}_{\text{solide}} \cdot \mathbf{n}_{\text{solide}} \quad (4.13)$$

– pour le modèle de fluide réel (avec frottements visqueux)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{solide}} \quad (4.14)$$

Pour les écoulements externes, on utilisera souvent des conditions rejetées à l'infini de l'obstacle du type :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{v} = \mathbf{V}_{\infty} \quad (4.15)$$

où r est la distance à l'obstacle. \mathbf{V}_{∞} est par exemple l'opposé de la vitesse d'un véhicule, lorsque l'on étudie l'écoulement dans un référentiel lié à ce dernier.

Pour les écoulements fermés (en général en tuyauterie), on connaît en général la vitesse à l'entrée, et la pression à la sortie (par exemple pression atmosphérique si l'écoulement débouche à l'air libre).

4.3 Application aux écoulements en tuyauterie.

4.3.1 Préliminaire.

Il est intéressant d'un point de vue pratique, et pour faire le lien avec le cours de thermodynamique, de reprendre les équations de conservation sur un tube de

courant, en faisant l'hypothèse d'un écoulement piston, afin de pouvoir supposer les grandeurs homogènes sur les sections d'entrée et sortie. On suppose de plus les parois solides. Le système est représenté figure 4.2), on retrouve la section d'entrée S_e , la section de sortie S_s et la surface latérale est constituée par un solide en contact avec le fluide. Nous allons écrire l'expression générale (2.12) rappelée ci-dessous respectivement pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie.

$$\frac{dG}{dt} = \underbrace{g_e v_e S_e}_{\dot{G}_e} - \underbrace{g_s v_s S_s}_{\dot{G}_s} + R^+(t) - R^-(t) \quad (4.16)$$

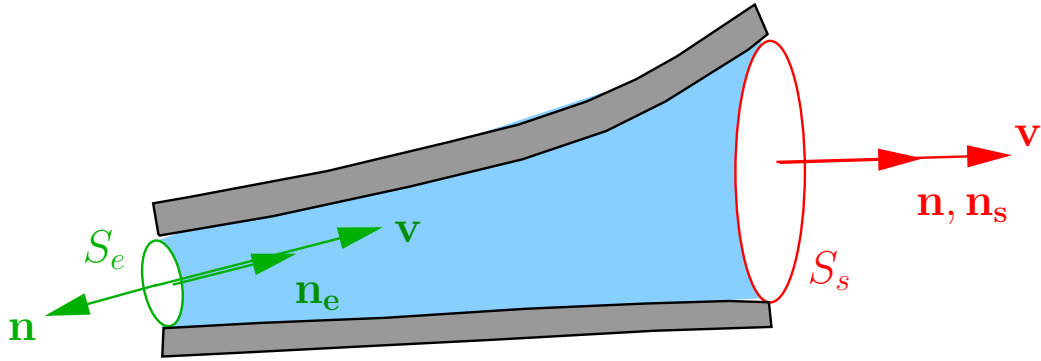


FIG. 4.2 – Tube de courant.

4.3.2 Conservation de la masse.

Il n'y a pas de terme source dans la conservation de la masse ($R^+ = R^- = 0$) et l'équation (2.12) s'écrit donc, avec $G = M$ et $g = \rho$:

La conservation de la masse sur le tube de courant s'écrit alors simplement :

$$\frac{dM}{dt} = \underbrace{\rho_e v_e S_e}_{\dot{M}_e} - \underbrace{\rho_s v_s S_s}_{\dot{M}_s} \quad (4.17)$$

Dans le cas du régime permanent, le **débit massique est conservé** dans le tube de courant :

$$\dot{M}_s = \dot{M}_e \quad (4.18)$$

$$\rho_e v_e S_e = \rho_s v_s S_s \quad (4.19)$$

Par unité de temps, il rentre autant de matière dans le tube qu'il n'en sort, autrement dit le tube n'accumule pas de matière.

Ce résultat très intuitif est l'un des fondements du génie des procédés.

4.3.3 Conservation de la quantité de mouvement.

En écrivant (2.12) avec $G = \mathbf{P}$, $g = \rho \mathbf{v}$, $R^+ - R^- = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$, nous obtenons

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \rho_e v_e S_e \mathbf{v}_e - \rho_s v_s \mathbf{v}_s S_s + \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4.20)$$

$$= \dot{M}_e \mathbf{v}_e - \dot{M}_s \mathbf{v}_s + \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4.21)$$

On notera que ces relations sont des relations vectorielles, ce qui est important notamment quand les surfaces d'entrée et de sortie sont orientées différemment (voir exemple du tube en U ci-dessous).

On remarquera que puisque $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ est la somme des forces exercées par l'extérieur sur le volume de fluide, $-\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ est la force exercée par le fluide sur l'extérieur, et apparaît donc comme la différence des flux de quantité de mouvement entrant et sortant. Ce dernier résultat est d'une utilité très pratique, par exemple pour déterminer les efforts exercés par l'écoulement du fluide sur une tuyauterie coudée² ou à section variable (voir TD). Il est également à la base du principe de propulsion (réacteur, hélice ...) où l'on accélère le fluide qui rentre grâce un apport d'énergie (en brûlant du combustible).

Ces derniers points peuvent être mis en évidence très simplement en explicitant les intégrales sur S_e et S_s dans l'expression de la force totale sur le solide (4.9) obtenue précédemment. En admettant que les forces visqueuses sur les surfaces d'entrée S_e et de sortie S_s sont négligeables (elles le sont dans la pratique), on obtient

La force totale exercée par un écoulement permanent + l'air extérieur sur un tube solide s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{Totale/Solide}} &= [\dot{M}_e v_e + (p_e - p_{\text{atm}}) S_e] \mathbf{n}_e - [\dot{M}_s v_s + (p_s - p_{\text{atm}}) S_s] \mathbf{n}_s + M \mathbf{g} \\ &= (\rho_e v_e^2 + p_e - p_{\text{atm}}) S_e \mathbf{n}_e - (\rho_s v_s^2 + p_s - p_{\text{atm}}) S_s \mathbf{n}_s + M \mathbf{g} \end{aligned} \quad (4.22)$$

où \mathbf{n}_e et \mathbf{n}_s sont les normales aux surfaces d'entrée et de sortie, **orientées dans le sens de l'écoulement**.

En l'absence de mouvement, la force exercée sur la structure est compensée par le poids du fluide + les forces de pressions à l'entrée et à la sortie. En présence de mouvement, la structure subit une force additionnelle égale à la perte de quantité de mouvement du fluide entre l'entrée et la sortie.

²On pourra en faire l'expérience avec un tuyau flexible (de douche par exemple) qui a une fâcheuse tendance à se promener lorsque l'on ouvre le robinet

La formulation ci-dessus est particulièrement intéressante lorsque la tuyauterie débouche à l'atmosphère, auquel cas $p_s = p_{\text{atm}}$.

Application : considérons un tube en U de section S (Fig. 4.3) dans lequel un écoulement d'air rentre à la pression atmosphérique p_{atm} et à la vitesse $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$. Nous supposons le fluide incompressible de telle sorte que $\rho_e = \rho_s = \rho$.

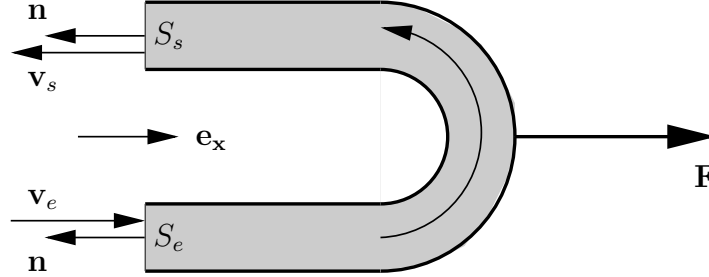


FIG. 4.3 – Force exercée par un écoulement sur un tube en U

Dans ces conditions, la conservation de la masse en régime permanent impose que la vitesse de sortie soit égale à $-v\mathbf{e}_x$. En négligeant le poids de l'air dans le tube, la formule (4.22) fournit :

$$\mathbf{F}_{\text{Totale/Solide}} = 2\rho v^2 S \mathbf{e}_x$$

et est donc orientée dans le sens de \mathbf{e}_x .

On voit donc que la force totale exercée sur la tuyauterie est indépendante de la pression atmosphérique. Ce résultat est vrai pour tout écoulement interne pour lequel la paroi du tube est soumise à la pression atmosphérique.

4.3.4 Conservation de l'énergie.

Nous allons écrire (2.12) avec $G = U + K$, $g = \rho(u + v^2/2)$ et $R^+ - R^- = \dot{W} + \dot{Q}$. Le calcul de \dot{Q} relève du cours de transfert thermique et sera laissé tel quel ici. Nous pouvons en revanche calculer \dot{W} , puisque nous connaissons les forces extérieures : poids, force de pression et de frottement visqueux. Nous allons généraliser un peu le cas du tube de courant de la façon suivante :

- nous rajoutons une surface S_u mobile à l'intérieur du tube, correspondant par exemple aux pales d'une hélice ou d'une turbine.
- nous supposons que S_{lat} est une paroi solide, qui en vertu de la condition d'adhérence, est bien une ligne de courant.

Ces hypothèses minimales permettent de représenter un grand nombre de composants des réseaux de fluide. Il est facilement vérifiable que l'équation (2.12) reste donc valable en présence de la surface mobile S_u .

Démonstration : l'ajout de S_u qui est une surface mobile pose une légère difficulté supplémentaire car nous avons supposé jusqu'alors que le volume de bilan V était un volume *fixe*, ce qui n'est plus le cas ici. Comme nous l'avons mentionné page 24, le terme convectif $\iint_S g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ doit être généralisé en $\iint_S g(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS$, où \mathbf{w} est la vitesse locale de la surface S . Ici le problème se pose seulement sur S_u , qui est la seule surface mobile. Mais cette surface est étanche et par conséquent, nous avons $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$ en chaque point de S_u , et le terme convectif associé est donc nul.

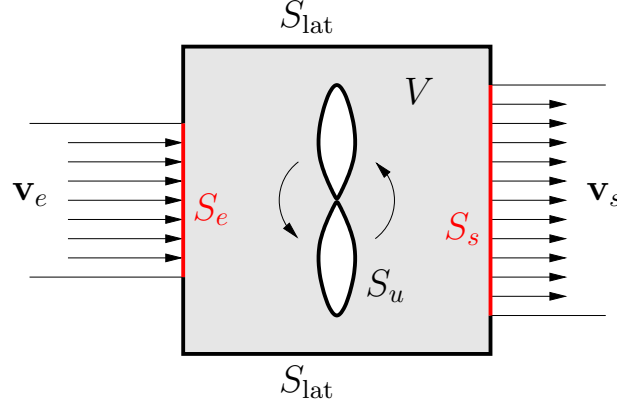


FIG. 4.4 – Schéma générique d'une machine fluide

En revanche la présence de S_u influe bien sûr sur le calcul de \dot{W} , puisque cette pièce mobile est justement présente pour fournir (ou prélever) de l'énergie au fluide. Nous admettrons que la puissance des forces de frottement visqueux sur les sections d'entrée et de sortie sont négligeables. De plus la puissance des forces de contact sur S_{lat} est nulle, puisque la vitesse y est nulle de par la condition d'adhérence (cf. section 4.2). Ensuite, nous notons \dot{W}_u la **puissance des forces exercées par la pale sur le fluide** et nous supposons la puissance du poids nulle pour simplifier l'exposé³. Dans ces conditions, la puissance des forces extérieures (4.10) s'écrit :

³ce qui est vrai si les sections d'entrée et de sortie sont de faibles dimensions, à la même hauteur, et que l'extension verticale des pales est petite. On consultera l'annexe A pour la prise en compte de ce terme.

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= \underbrace{\iint_{S_e} -p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{= p_e v_e S_e} + \underbrace{\iint_{S_s} -p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{= -p_s v_s S_s} + \underbrace{\iint_{S_e + S_s} (\bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS}_{\simeq 0 \text{ (admis)}} \\
&+ \underbrace{\iint_{S_{\text{lat}}} (-p \mathbf{n} + \bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS}_{= 0 \text{ car } \mathbf{v} = 0 \text{ sur } S_{\text{lat}} \text{ (condition d'adhérence)}} + \underbrace{\iint_{S_u} (-p \mathbf{n} + \bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS}_{\dot{W}_u \text{ par définition}} \\
&+ \underbrace{\iiint_V (\rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{v} \, dV}_{\text{supposé nul ici, cf. annexe A}} \tag{4.23}
\end{aligned}$$

soit

$$\dot{W} = p_e v_e S_e - p_s v_s S_s + \dot{W}_u \tag{4.24}$$

Les deux premiers termes sont les puissances des forces de pression exercées par le fluide à l'entrée et à la sortie sur le fluide interne à la machine. Il est important de bien comprendre que \dot{W}_u et \dot{W} diffèrent l'un de l'autre par ces deux termes.

Dans ces conditions, (2.12) s'écrit, avec $G = U + K$, $g = \rho(u + v^2/2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(U + K) &= \rho_e \left(u_e + \frac{v_e^2}{2} \right) v_e S_e - \rho_s \left(u_s + \frac{v_s^2}{2} \right) v_s S_s \\
&\quad + p_e v_e S_e - p_s v_s S_s + \dot{W}_u + \dot{Q}
\end{aligned}$$

Mais en rappelant que le débit massique s'écrit $\dot{M} = \rho v S$, le bilan se ré-écrit :

$$\frac{d}{dt}(U + K) = \dot{M}_e \left(u_e + \frac{p_e}{\rho_e} + \frac{v_e^2}{2} \right) - \dot{M}_s \left(u_s + \frac{p_s}{\rho_s} + \frac{v_s^2}{2} \right) + \dot{W}_u + \dot{Q}$$

ce qui fait apparaître l'enthalpie massique $h = u + p/\rho$, d'où finalement :

$$\frac{d}{dt}(U + K) = \dot{M}_e \left(h_e + \frac{v_e^2}{2} \right) - \dot{M}_s \left(h_s + \frac{v_s^2}{2} \right) + \dot{W}_u + \dot{Q} \tag{4.25}$$

Ici nous n'avons pas pris en compte le travail des forces de pesanteur. Dans le cas le plus général où la pesanteur joue un rôle notable, notamment si les sections d'entrée

et de sortie sont à des altitudes très différentes, nous montrons en annexe A (la démonstration est sans difficulté particulière mais un peu longue) que ce résultat se généralise en :

Le premier principe en système ouvert s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(U + K + E_p) = \dot{M}_e \left(h_e + \frac{v_e^2}{2} + gz_e \right) - \dot{M}_s \left(h_s + \frac{v_s^2}{2} + gz_s \right) + \dot{W}_u + \dot{Q} \quad (4.26)$$

où E_p est l'énergie potentielle de pesanteur du fluide dans la machine.

Insistons sur les points suivants :

- l'enthalpie provient des forces de pression à l'entrée et à la sortie, que nous avons séparé volontairement du travail utile, tout simplement parce que seul ce dernier est intéressant dans ce genre de problème.
- le terme instationnaire dU/dt est une variation d'**énergie interne** et non pas d'enthalpie comme parfois écrit à tort. A ce titre, il est donc injustifié de parler de “bilan enthalpique”, comme c'est malheureusement souvent le cas en génie des procédés.
- la puissance \dot{W}_u intervenant ici, dite puissance utile, **est la puissance des seules forces** exercées par les pales à l'intérieur de la machine, car les puissances des forces de pression à l'entrée et à la sortie sont déjà intégrées dans les enthalpies. \dot{W}_u est nulle dans plusieurs cas pratiques (vanne de détente, échangeurs de chaleur), positive si le fluide reçoit du travail de ces pales (compresseur, pompe), négative si le fluide fournit du travail (turbine, éolienne, moulins).

4.3.5 Théorème de l'énergie cinétique.

Il est également intéressant d'écrire le théorème de l'énergie cinétique (4.12) dans cette configuration. Le calcul est assez simple, car nous venons de calculer la puissance des forces extérieures. Nous obtenons :

Le théorème de l'énergie cinétique pour une machine fluide s'écrit, dans le cas général :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(K + E_p) = \dot{M}_e \left(\frac{p_e}{\rho_e} + \frac{v_e^2}{2} + gz_e \right) - \dot{M}_s \left(\frac{p_s}{\rho_s} + \frac{v_s^2}{2} + gz_s \right) + \dot{W}_u \\ + \underbrace{\iiint_V p \operatorname{div} \mathbf{v} dV - \Phi_v}_{\text{Puissance des forces intérieures}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Nous voyons que cette équation ressemble beaucoup au premier principe, mais il ne faut cependant pas les confondre. La dernière équation fait intervenir la puissance des forces intérieures, absente dans le premier principe.

- Le premier terme $\iiint_V p \operatorname{div} \mathbf{v} dV$ est la puissance des forces de pression interne (nulle en incompressible) et correspond à de l'énergie élastique emmagasinée par le fluide dans la machine. Il peut être positif (cas d'une détente) ou négatif (pour une compression).
- Le terme Φ_v en revanche est toujours positif et représente la puissance des forces de frottement visqueux à l'intérieur du fluide. Il s'agit d'une **dissipation irréversible d'énergie**. Nous verrons ultérieurement que ce terme est fondamental notamment pour décrire les **pertes d'énergie dans les écoulements en conduite**.

Il est enfin intéressant de soustraire cette équation au premier principe (4.26) pour obtenir les variations d'énergie interne du fluide :

$$\frac{dU}{dt} = \dot{M}_e u_e - \dot{M}_s u_s - \iiint_V p \operatorname{div} \mathbf{v} dV + \Phi_v + \dot{Q} \quad (4.28)$$

Nous voyons que la dissipation irréversible d'énergie Φ_v , toujours positive, peut par exemple :

- augmenter l'énergie interne du fluide U dans la machine (donc sa température)
- être compensée par une cession de chaleur à l'extérieur ($\dot{Q} < 0$)
- augmenter l'énergie interne u_s du fluide sortant (donc sa température)

Ainsi le simple fait de mettre en mouvement un fluide dans un récipient fermé ($\dot{M} = 0$) et calorifugé ($\dot{Q} = 0$) chauffe ce fluide (pensez aux lubrifiants dans une voiture par exemple).

On voit également que la puissance des forces intérieures de pression a le même effet dans le cas d'une compression, et l'effet inverse dans le cas d'une détente. Par

exemple dans le détendeur d'un réfrigérateur, qui fonctionne en régime permanent, ce terme est négatif et est partiellement compensé par un $\dot{Q} > 0$ (le détendeur reçoit de la chaleur du compartiment du réfrigérateur ... et refroidit donc les aliments qui y sont stockés).

4.4 Équations locales.

4.4.1 Contexte

Jusqu'à présent, nous avons écrit des équations de bilan sur un volume V macroscopique, fixe dans l'espace. Il est possible d'en déduire des équations aux dérivées partielles, dites **locales**, reliant les grandeurs de l'écoulement en chaque point.⁴

Leur interprétation directe pose souvent des problèmes au débutant, et c'est pourquoi nous avons reporté leur écriture le plus loin possible. Nous verrons que sous certaines conditions, il existe une forme intégrée (sans aucune dérivée ni intégrale !) de ces équations, dite formule de Bernoulli, très pratique dans un certain nombre de cas.

Aussi, les équations locales seront peu utilisées dans cette première partie du cours, sauf :

- pour démontrer le théorème de l'énergie cinétique énoncé plus haut
- pour démontrer la formule de Bernoulli présentée au chapitre suivant pour un fluide parfait.

Il faut bien comprendre cependant que la majorité des problèmes de mécanique des fluides ne peut être résolu que par les équations locales et elles constituent donc un outil indispensable dans le cas général.

4.4.2 Obtention

Leur écriture se déduit des équations précédentes à l'aide des formules d'Ostrogradski (cf. annexe B). Nous détaillons seulement l'équation de conservation de la masse : reprenons (4.1) : l'intégrale de surface se transforme par (B.3) et la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$ commute avec l'intégrale triple car V est un volume fixe. On obtient donc :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = 0$$

⁴Les cours de mécanique des fluides commencent souvent par développer ces équations. Nous préférons la démarche inverse dans la mesure où les bilans sous forme globale nous paraissent plus intuitifs.

Cette équation est vraie pour tout volume V aussi petit fut-il et par conséquent l'intégrande est nul, soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.29)$$

conservation de la masse sous forme locale.

De la même façon, en utilisant (B.4) on démontre l'équation de conservation de la quantité de mouvement, dite "sous forme conservative", car elle découle directement du bilan écrit plus haut :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\mathbf{grad} p + \rho \mathbf{g} + \mathbf{div} \bar{\bar{\sigma}}_v \quad (4.30)$$

On remarquera l'apparition de deux objets mathématiques inusuels

- le produit $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ est le tenseur de terme principal $v_i v_j$ (écrivez la matrice à titre d'exercice)
- l'opérateur \mathbf{div} (qui fournit un vecteur, à ne pas confondre avec div d'un vecteur qui fournit un scalaire) s'applique à un tenseur et donne un vecteur dont chaque composante est la divergence de chaque ligne de la matrice.

On utilise plus souvent la forme non conservative de cette équation. On montre que le premier membre peut être transformé, en utilisant la conservation de la masse, par :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p + \rho \mathbf{g} + \mathbf{div} \bar{\bar{\sigma}}_v \quad (4.31)$$

conservation de la quantité de mouvement sous forme locale.

Le produit $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ est formellement le produit scalaire du vecteur vitesse par le vecteur nabla et est donc (en coordonnées cartésiennes) l'opérateur $v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$. Par conséquent le terme $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ est cet opérateur appliqué à chaque composante de \mathbf{v} , soit :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Le jeu d'équations (4.29), (4.31) sans les forces de frottement visqueux forme les "équations d'Euler"⁵.

Enfin l'équation de conservation de l'énergie peut être obtenue à partir du premier principe (4.11), puis par utilisation de la formule (B.3). On obtient, sous forme conservative :

$$\frac{\partial[\rho(u + v^2/2)]}{\partial t} + \text{div} [\rho(u + v^2/2)] = -\text{div}(p\mathbf{v}) + \text{div}(\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_v \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \text{div} \mathbf{q} \quad (4.32)$$

où \mathbf{q} est une densité de flux de chaleur sortant ($\dot{Q} = - \iint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS$), dont la spécification est l'objet du **cours de transfert thermique**. Ici encore le membre de gauche peut être transformé pour obtenir :

$$\rho \frac{\partial(u + v^2/2)}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(u + v^2/2) = -\text{div}(p\mathbf{v}) + \text{div}(\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_v \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \text{div} \mathbf{q} \quad (4.33)$$

expression du premier principe sous forme locale.

L'équation de l'énergie peut être écrite sous des formes diverses, Notamment en lui soustrayant, comme nous l'avons fait sous forme globale, le théorème de l'énergie cinétique. Le lecteur intéressé pourra se reporter au livre de Bird et al. (1960), page 322.

4.4.3 Un jeu d'équations complet ?

A ce stade il est pertinent de se demander si le jeu d'équations (4.29), (4.31), (4.33) est suffisant pour résoudre un problème pratique. Pour cela comptons les équations et les inconnues⁶ :

- nous avons 5 équations : 1 pour la masse, 3 pour la quantité de mouvement car c'est une équation vectorielle, 1 pour l'énergie.

⁵Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien suisse : initialement destiné par sa famille à une carrière ecclésiastique, il se consacrera avec succès aux sciences. Il en effet l'auteur de nombreux ouvrages en mathématiques, astronomie, mécanique, physique, optique ou encore acoustique. Il sera surtout connu pour ses travaux mathématiques, dans le domaine de l'analyse (étude de fonctions et calcul infinitésimal). Il fut l'élève de Jean Bernoulli et ami de son fils Daniel, également à l'origine d'une formule célèbre en hydrodynamique. Il inspirera de nombreux chercheurs, notamment Lagrange.

⁶On admettra pour l'instant que le tenseur des contraintes visqueuses $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_v$ et la densité de flux de chaleur \mathbf{q} n'introduisent pas de variables supplémentaires.

- nous avons 6 inconnues : la masse volumique ρ , les 3 composantes de la vitesse \mathbf{v} , la pression p et l'énergie interne u .

Il manque donc une équation ! Cette équation manquante est l'équation d'état reliant par exemple u , ρ et p .

Les équations de conservation doivent être complétées par une équation d'état du fluide pour que le problème puisse être résolu.

4.4.4 Cas du fluide incompressible

Il existe une simplification majeure si l'on suppose le fluide incompressible. Dans ce cas *la masse volumique ρ est supposée constante au cours du temps et dans tout l'espace*. Cette variable disparaît donc de l'ensemble des inconnues et mieux encore, on voit alors que l'équation de l'énergie est découplée des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Un écoulement de fluide incompressible est défini par :

$$\rho = C^{\text{te}} \quad \text{dans le temps et l'espace}$$

qui fait office d'équation d'état.

Il peut être décrit uniquement par les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

L'équation de conservation de la masse se réduit alors à :

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \tag{4.34}$$

Ce découplage de l'équation de l'énergie est en fait vrai dans une classe de problèmes plus large, où l'on peut trouver une relation entre p et ρ (on parle de fluides "barotropes"). Par exemple pour un gaz parfait en écoulement isentropique, on pourra écrire $p/\rho^\gamma = \text{constante}$.

Il reste une question majeure : quand peut-on dire qu'un fluide est incompressible ? Il faut considérer la question avec la même approche que pour la prise en compte ou non des forces visqueuses. **Tous les fluides sont en fait compressibles !**

Ici l'intuition peut être trompeuse : on sent bien qu'un liquide par exemple est moins compressible qu'un gaz, et l'on pourrait être tenté d'appliquer l'approximation incompressible aux liquides mais pas aux gaz. Ce serait une erreur comme en témoignent les exemples suivants :

- l'écoulement d'air autour d'un avion volant à faible vitesse peut être considéré comme incompressible
- l'étude des explosions sous-marines serait grandement faussée par l'hypothèse incompressible
- le son se propagerait à une vitesse infinie dans un fluide incompressible, liquide ou gaz.

De même que la prise en compte des effets visqueux dépend du nombre de Reynolds, la prise en compte de la compressibilité dépend de la valeur d'un nombre adimensionnel :

On définit le **nombre de Mach**^a par :

$$\text{Ma} = \frac{v}{c} \quad (4.35)$$

où v est un ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement, et c la vitesse du son dans le fluide. En général, on pourra raisonnablement considérer qu'un écoulement est incompressible pour :

$$\text{Ma} < 0.3$$

^aErnst Mach (1838-1916) : scientifique autrichien. Apôtre du positivisme (la science ne soit se baser que sur l'observation expérimentale et la sensation des phénomènes), son nom reste célèbre par son approche des écoulements supersoniques ($\text{Ma} > 1$), dont il pressent les propriétés particulières. Avant Einstein, il est le premier à rejeter le caractère absolu du temps et de l'espace, initiant ainsi la théorie de la relativité générale. Il fut également l'un des plus fervents opposants à Boltzmann, et plus généralement à l'existence de l'atome.

Il existe bien sûr des exceptions à cette règle. Par exemple, si l'on veut étudier la propagation du son, on ne pourra pas négliger la compressibilité du fluide, bien que les vitesses mises en jeu soient infimes.

Quelques ordres de grandeurs de la vitesse du son : 340 m/s dans l'air 1500 m/s dans l'eau.

Chapitre 5

Mouvement du fluide parfait incompressible

5.1 Rappel des hypothèses et équations

Comme nous l'avons vu aux chapitres précédent :

- le fluide peut en général être considéré parfait (les forces de frottement visqueuses sont négligeables) à grand nombre de Reynolds et loin des parois solides. Au niveau des parois, le fluide doit être libre de glisser (vitesse tangentielle non nulle).
- le fluide peut être considéré incompressible pour des nombres de Mach faibles (pratiquement < 0.3).

Dans ces conditions les équations du mouvement sont, sous forme globale :

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} \, dV + \iint_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S -p \mathbf{n} \, dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} \, dV \quad (5.2)$$

Sur un tube de courant, ces équations deviennent :

$$v_e S_e = v_s S_s \quad (5.3)$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = (p_e + \rho v_e^2) - (p_s + \rho v_s^2) - \mathbf{F}_{\text{Fluide/Solide}} + M\mathbf{g} \quad (5.4)$$

où \mathbf{P} est la quantité de mouvement totale du tube, M est la masse de fluide dans le tube, $vS = \dot{V}$ est le **débit volumique en m³/s**, et $\mathbf{F}_{\text{Fluide/Solide}}$ est la force exercée

par le fluide sur les parois latérales du tube plus éventuellement les pales dans le cas d'une machine. On comprendra mieux désormais pourquoi les fabricants de pompes (destinées à mouvoir du liquide) parlent plutôt de débit volumique que de débit massique.

Enfin, les équations du mouvement locales s'écrivent :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.5)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{g} \quad (5.6)$$

On remarquera dans les trois jeux d'équations que le terme instationnaire (en $\partial/\partial t$) disparaît de l'équation de conservation de la masse. En regardant par exemple le bilan sur un tube de courant, on voit qu'une différence de débit d'entrée et de sortie ne saurait être compensée par une accumulation de matière dans le tube, puisque le fluide ne peut être comprimé.

Ces équations comportent toujours des dérivées partielles et sont à ce titre, "complexes". Une simplification remarquable, rendant l'hydrodynamique accessible au plus grand nombre en a été proposée Bernoulli¹ au 18^{ème} siècle.

5.2 Formule de Bernoulli

5.2.1 Hypothèses-Enoncé

Avec les hypothèses :

- fluide parfait,
- fluide incompressible,
- régime permanent,

la quantité $\left(p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z \right)$ est constante *le long d'une ligne de courant*.

¹Daniel Bernoulli (1700-1782) : scientifique suisse, appartient à une famille de scientifiques. Son père Jean Bernoulli fut un mathématicien brillant (anecdotiquement on lui doit le symbole \mathbf{g} pour la pesanteur), dont Euler fut l'élève. Son oncle Jacques et son frère Nicolas furent également mathématiciens. Daniel Bernoulli publie ses travaux sur l'hydrodynamique et la théorie cinétique des gaz en 1738 (il donna une version partielle de l'équation de Van der Waals avec un siècle d'avance). Il s'intéresse également à la théorie de l'élasticité et aux vibrations de cordes et de tuyaux avec Euler, dont il fut l'ami proche, et d'Alembert. Il fut également professeur de botanique, d'anatomie et de philosophie (!!).

5.2.2 Démonstration

La démonstration, qu'on pourra oublier, est présentée ci-dessous.

En régime permanent, le terme $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ disparaît de l'équation (5.6). Par ailleurs en utilisant la formule (B.1) de l'annexe B, et en divisant tout par ρ , on obtient :

$$\mathbf{grad} \frac{v^2}{2} + \mathbf{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} = -\frac{\mathbf{grad} p}{\rho} - \mathbf{grad} gz$$

en remarquant de plus que, avec l'axe Oz orienté vers le haut $\mathbf{g} = -\mathbf{grad} gz$. Effectuons le produit scalaire de cette équation par un élément $d\mathbf{M}$ de ligne de courant : puisque les lignes de courant sont tangentes à \mathbf{v} , les deux vecteurs $d\mathbf{M}$ et \mathbf{v} sont parallèles, et le produit mixte $(\mathbf{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{M}$ est donc nul. Il reste donc :

$$\mathbf{grad} \frac{v^2}{2} \cdot d\mathbf{M} + \frac{\mathbf{grad} p}{\rho} \cdot d\mathbf{M} + \mathbf{grad} gz \cdot d\mathbf{M} = 0$$

Comme le fluide est incompressible, ρ peut être entré dans $\mathbf{grad} p$ et nous obtenons :

$$\mathbf{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) \cdot d\mathbf{M} = 0$$

ce qui signifie que l'intérieur du gradient ne varie pas le long de la ligne de courant. CQFD.

5.2.3 Commentaires

Cette formule est certainement la plus connue de la mécanique des fluides, la plus pratique, et aussi la plus dangereuse. Elle est pratique car on voit qu'elle ne présente plus aucune dérivée partielle, contrairement aux équations locales. Elle est dangereuse car comme nous le verrons, elle ne s'applique pas dans certaines configurations où les forces de frottement visqueux ne peuvent être négligées, ou encore pour des écoulements quasi permanents avec un travail utile.

Remarques diverses :

- pour un fluide immobile, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ et la formule de Bernoulli redonne la loi de l'hydrostatique.
- la formule de Bernoulli peut être vue comme une loi de conservation de l'énergie mécanique : elle signifie que énergie cinétique, énergie potentielle de pesanteur et pression sont interchangeables, sans pertes.
- la pression apparaît comme une énergie volumique.

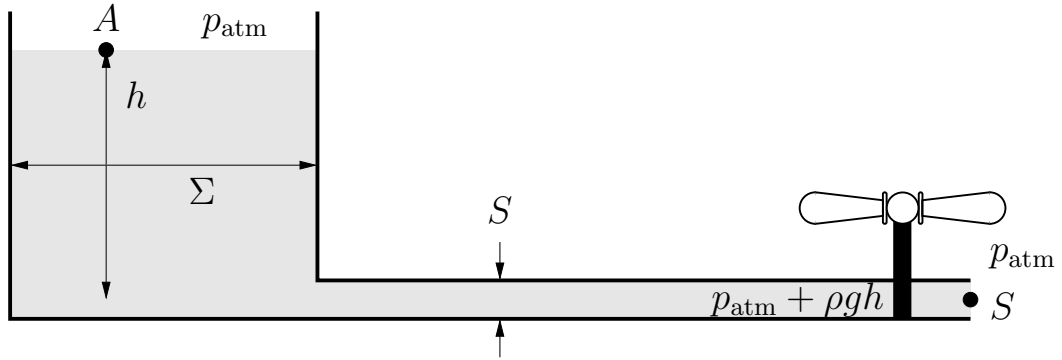


FIG. 5.1 – Château d'eau connecté à un tuyau fermé

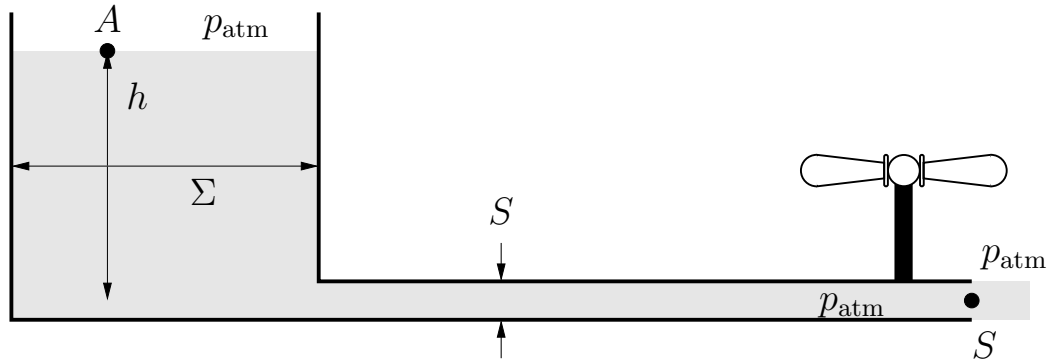


FIG. 5.2 – Château d'eau connecté à un tuyau ouvert à l'atmosphère

5.3 Applications

5.3.1 Problèmes de vidange

Considérons un château d'eau de section Σ dont le fond est ouvert sur une tuyauterie de section S , terminée par un robinet (Fig. 5.1). Soit h la hauteur entre le robinet et la surface libre dans le château d'eau.

Si le robinet est fermé, la pression p s'exerçant sur le robinet coté fluide est $p_{\text{atm}} + \rho gh$ et vaut p_{atm} coté air. Le clapet du robinet est donc soumis à une différence de pression nette $p = \rho gh$. C'est de cette pression que l'on parle lorsque l'on dit par exemple que ce robinet est à une pression de 8 bars : il s'agit aussi bien d'une hauteur égale à 8 bars $/\rho g$.

Si on ouvre maintenant le robinet (Fig. 5.2) :

- le fluide dans le tuyau revient à la pression p_{atm}
- les vitesses aux points A et S sont reliées par $v_A \Sigma = v_S S$ via la conservation de la masse. En général $\Sigma \gg S$ et par conséquent $v_A \ll v_S$
- si le tuyau est à section constante, la vitesse vaut v_B dans toutes les sections du tube.

par conséquent, Bernoulli appliqué entre A et S indique que

$$p_{\text{atm}} + \rho gh + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v_A^2}_{\text{négligeable}} = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho v_S^2$$

l'énergie cinétique du fluide à la sortie est donc $\frac{1}{2}\rho v_S^2 = \rho gh$, énergie potentielle de pesanteur.

Nous voyons donc que la relation de Bernoulli indique qu'une hauteur est toujours convertible en pression ou en vitesse. C'est la notion de **charge** que nous définirons un peu plus loin.

Notons également que l'on peut déduire la vitesse de vidange du château d'eau de la formule ci-dessus :

$$v_S = \sqrt{2gh} \quad (5.7)$$

connue sous le nom de **formule de Toricelli** ^a.

^aEvangeliste Toricelli (1608-1647) : mathématicien physicien italien qui fut élève, puis secrétaire et compagnon de Galilée pendant les 3 derniers mois de sa vie. Il est l'inventeur de la pression atmosphérique, du baromètre à mercure et a donné son nom au torr unité de pression = 1 mm de Hg. Il expliqua correctement pourquoi les variations de hauteur du baromètre à mercure étaient 14 fois plus petites que celles du baromètre à eau, en terme de densités. Il est le premier à parler de "vide", qu'il obtint en renversant un tube rempli de liquide dans un bain contenant le même liquide. Il a développé également la notion de quantité de mouvement.

Une dernière remarque importante : en un point M quelconque du tuyau horizontal, le fluide se déplace à la vitesse $v = v_S$, en raison de la conservation de la masse. La formule de Bernoulli, appliquée entre M et S indique alors que la pression en M vaut p_{atm} , et ce quelle que soit la longueur du tuyau ! Cela signifie que le château d'eau pourrait alimenter une maison distante de plusieurs milliers de kilomètres... Le paradoxe vient bien sûr du modèle de fluide parfait, mis en défaut sur de telles longueurs. Nous y reviendrons dans la section suivante.

5.3.2 Pression dynamique. Forces sur un obstacle.

Autre application, cette fois en écoulement externe. Imaginons un écoulement parallèle non perturbé à la vitesse \mathbf{V}_∞ et plaçons un obstacle dans cet écoulement (Fig. 5.3). Les lignes de courant venant de l'infini amont de l'obstacle vont le contourner de chaque côté. Intuitivement on voit qu'il existe une ligne de courant s'arrêtant

perpendiculairement sur l'obstacle en un point A de vitesse nulle, de par la condition d'étanchéité. Un tel point est appelé **point d'arrêt**, ou de **stagnation** de l'écoulement.

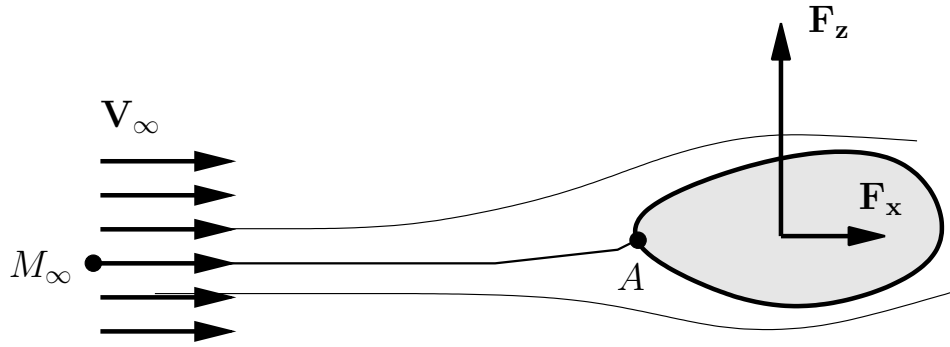


FIG. 5.3 – Écoulement autour d'un obstacle. A est le point de stagnation ou d'arrêt. L'obstacle subit une force de traînée \mathbf{F}_x et une force de portance \mathbf{F}_z .

Si nous appliquons Bernoulli entre ce point et un point M_∞ infiniment éloigné de l'obstacle, nous obtenons (en négligeant la pesanteur) :

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = p_A \quad (5.8)$$

La pression p_A est appelée **pression de stagnation** ou **pression dynamique**. Elle est nécessairement supérieure à la pression infinie amont, et ce d'autant plus que la vitesse de l'écoulement est élevée. On peut la mesurer avec un **tube de Pitot** dont l'élément principal est un petit tube très fin placé face à l'écoulement. Le fluide ne pénètre pas dans le tube de telle sorte que son extrémité est un point d'arrêt, donc à la pression p_A de la relation (5.8).

Par ailleurs, on comprend aisément que l'obstacle subit une pression additionnelle, de par le mouvement du fluide, égale à $1/2\rho V_\infty^2$ (c'est cette force que l'on sent lorsque l'on passe la main par le vitre d'une voiture). La force subie par l'obstacle de la part de l'écoulement sera donc de l'ordre de

$$\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \times S$$

où S est une section caractéristique de l'obstacle (par exemple $4\pi R^2$ dans le cas d'un obstacle sphérique).

On décompose usuellement cette force en une composante \mathbf{F}_x parallèle à l'écoulement, appelée **traînée**, et une force perpendiculaire \mathbf{F}_z appelée **portance** (oui, c'est bien celle qui porte les avions ...). Leur calcul dépasse le cadre de ce cours, mais puisque nous avons un ordre de grandeur de ces forces, on les définit par des nombres adimensionnels C_x et C_z appelés respectivement **coefficient de traînée** et **coefficient de portance** :

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S}$$

$$C_z = \frac{F_z}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S}$$

A titre indicatif le C_x d'une voiture de course est de l'ordre de 0.3 alors que celui d'une 2 CV atteint 0.6. La notation C_x a donné son nom à l'une des voitures pionnières en matière d'aérodynamique dans les années 70...

Le rapport C_z/C_x est connu sous le nom de "finesse" en aviation et définit la capacité d'un avion à planer. Elle est de l'ordre de 40 pour un planeur, de 25 pour un gros avion de transport, et de 8 pour un petit avion de tourisme.

Exercice : calculer l'ordre de grandeur des forces aérodynamiques sur un airbus A320 (surface totale des ailes 122.6 m², masse maximale 54 400 kg, vitesse de croisière 955 km/h, et masse volumique de l'air à 10000 m d'altitude = 0.41 kg /m³). On comparera au poids (masse maximale = 54 400 kg). Même calcul sur une voiture de 1500 kg à 100 km/h (on intuiquera les dimensions).

5.3.3 Notion de charge

On appelle charge ("head" en anglais) la grandeur

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \quad (5.9)$$

homogène à **une hauteur**

- $\frac{p}{\rho g}$ est appelée **hauteur piézométrique** ou **charge de pression**
- $\frac{v^2}{2g}$ est appelée **hauteur capable** ou **charge dynamique**

On définit aussi parfois la charge sous forme de pression :

$$P = \rho g z + p + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (5.10)$$

Cette définition convertit la pression et la vitesse en une hauteur ou en une pression équivalentes. Ainsi, dans les hypothèses précitées :

La formule de Bernoulli prédit que la charge est constante le long d'une ligne de courant

Cela est bien sûr faux dans l'absolu à cause des frottements visqueux et l'idée d'un château d'eau alimentant une maison distante de plusieurs milliers de kilomètres doit être oubliée dans la pratique.

Les différentes composantes de la charge peuvent être représentées graphiquement. Prenons tout d'abord le cas d'une canalisation de section constante et montante (Fig. 5.4). La section constante impose que la vitesse reste également constante le long du tuyau. Traçons par rapport à une référence arbitraire, les courbes d'évolution de chaque terme de la charge : z est simplement l'altitude du tuyau, $z + p/\rho g$ est appelée **ligne piézométrique**, H est la **ligne de charge** (horizontale si la formule de Bernoulli est applicable), et la charge dynamique $v^2/2g$ est la différence entre la ligne de charge et la ligne piézométrique. Ici cette dernière est également horizontale, puisque la vitesse est constante.

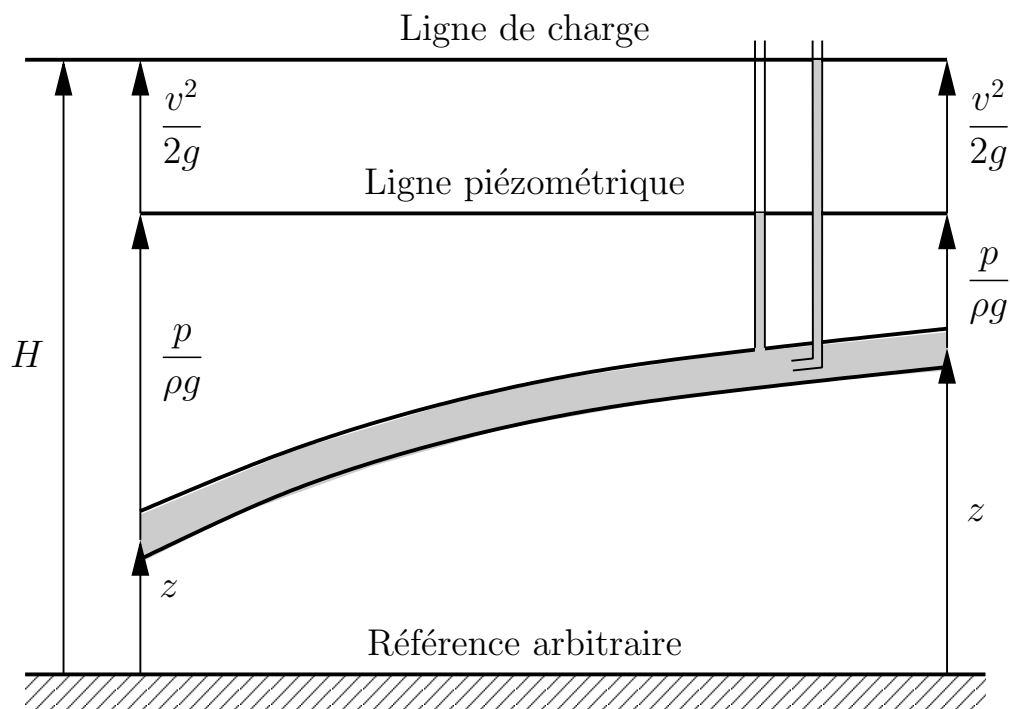


FIG. 5.4 – Ligne de charge et ligne piézométrique pour une canalisation de section constante en fluide parfait.

La figure 5.4 montre les interprétations physiques des lignes piézométriques et de charge. La première est la hauteur d'eau dans un tube connecté sur la paroi du tuyau. La seconde est la hauteur d'eau dans un tube relié à un embout de tube Pitot plongé au coeur de l'écoulement. Ce sont des conséquences de la formule de Bernoulli (on pourra le montrer à titre d'exercice).

Reprenons maintenant l'exemple du château d'eau sur le tuyau ouvert (Fig. 5.5). Nous prenons la référence au niveau du tuyau. La pression est constante égale à la pression atmosphérique dans tout l'écoulement, et la hauteur h est entièrement convertie en charge dynamique. Notons que dans l'approximation fluide parfait, le fluide ne monterait pas dans un quelconque tuyau connecté sur le côté de la

canalisation ².

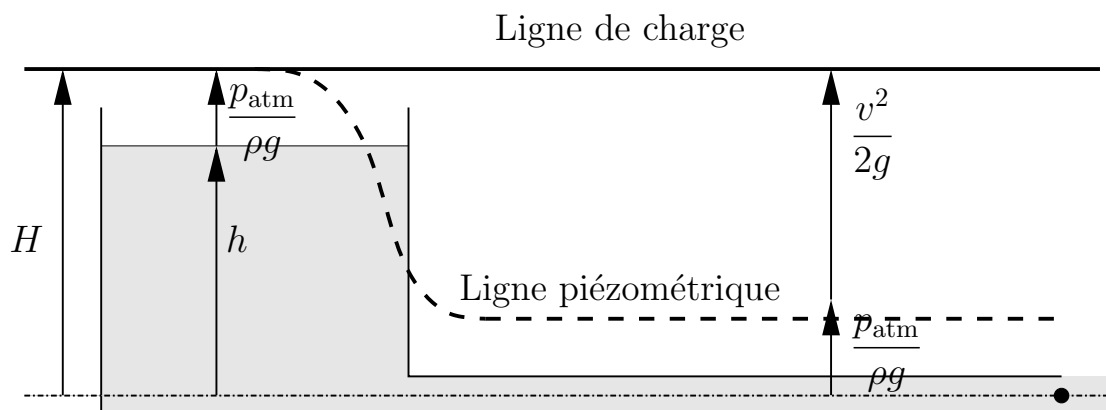


FIG. 5.5 – Ligne de charge et ligne piézométrique pour le problème du château d'eau ouvert sur une canalisation à l'atmosphère.

5.4 Pertes et gains de charge

5.4.1 Formule de Bernoulli généralisée

La formule de Bernoulli, mal utilisée, peut fournir des résultats totalement absurdes, confinant parfois au comique. Tout d'abord, dans la mesure où elle décrit un mouvement non dissipatif, il est probablement possible de lui faire inventer le mouvement perpétuel (rappelons le château d'eau alimentant une maison à quelques milliers de km) et de faire plaisir aux pétroliers pour transporter le pétrole dans les oléoducs à peu de frais ! Nous touchons ici aux pertes de charges occasionnées par le caractère visqueux du fluide, qui ne peut être négligé dans certains cas.

La formule de Bernoulli échoue également dans un autre cas fondamental : lorsque l'on prélève ou apporte du travail au fluide en écoulement à l'aide d'une machine tournante. Dans ce cas, ou bien on ajoute de la charge à l'écoulement, on bien on lui en prélève. Notons que cette configuration est loin d'être anecdotique puisqu'elle est à la base des pompes et des moulins, utilisés depuis l'antiquité.

Enfin, elle est inutilisable dans certains cas un peu plus subtils, pour lesquels l'hypothèse régime permanent doit être remise en cause.

Il est donc pertinent de mentionner ici les limites de la formule de Bernoulli après l'avoir exposée dans les sections précédentes. Nous allons donc calculer la variation de la charge entre la section d'entrée d'un tube de courant et sa section de sortie dans un cas très général. Elle est définie par :

²Pourquoi ?

$$H_s - H_e = \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \right)_s - \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \right)_e,$$

Pour calculer cette variation, utilisons le théorème de l'énergie cinétique (4.27) établi au chapitre précédent, écrit ci-dessous en régime permanent, et pour un fluide incompressible ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) :

$$\left(p + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2} \right)_s - \left(p + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2} \right)_e = \frac{\dot{W}_u}{\dot{V}} - \frac{\Phi_v}{\dot{V}} \quad (5.11)$$

où \dot{V} est le débit volumique dans le tuyau, \dot{W} la puissance utile, fournie ou prélevée par les pales et Φ_v la puissance des forces intérieures visqueuses. La variation de charge proprement dite s'écrit :

$$\left(\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} \right)_s - \left(\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} \right)_e = \frac{\dot{W}_u}{\rho g \dot{V}} - \frac{\Phi_v}{\rho g \dot{V}} \quad (5.12)$$

On remarquera³ que *le théorème de l'énergie cinétique fait intervenir directement la différence des charges entre la sortie et l'entrée* ! On retrouve donc la formule de Bernoulli *seulement* lorsque $\Phi_v = 0$ (*fluide parfait*) et $\dot{W}_u = 0$.

On retiendra que :

La différence de charge entre deux sections d'un écoulement en tuyauterie s'écrit :

$$H_s - H_e = \frac{\dot{W}_u}{\rho g \dot{V}} - \frac{\Phi_v}{\rho g \dot{V}} = h_u - h_v \quad (5.13)$$

où $h_v > 0$ est liée aux pertes par frottements, et $h_u > 0$ ou < 0 est liée à la puissance mécanique utile exercée sur le fluide.

En l'absence de machine et en fluide parfait, on retrouve la relation de Bernoulli :

$$H_s = H_e$$

Nous allons examiner individuellement les deux cas.

³Ce qui n'est pas étonnant puisque cette formule, comme celle de Bernoulli, découle de la conservation de la quantité de mouvement.

5.4.2 Frottement visqueux : $\Phi_v \neq 0$

Nous avons déjà mentionné que le terme de puissance Φ_v des forces visqueuses intérieures au fluide était toujours positive. Cette énergie, comme nous l'avons vu d'après la formule (4.28) est soit dissipée sous forme de chaleur, soit augmente la température du fluide. Dans tous les cas, c'est une perte d'énergie mécanique pour le fluide, et donc de charge, comme en témoigne l'équation (5.12).

Les pertes de charges sont de deux types :

5.4.2.1 Pertes de charge régulières

Appelées aussi pertes de charge linéiques, elles sont liées à l'adhérence du fluide sur les parois de la tuyauterie. Par un raisonnement dimensionnel, on montre que la perte de charge peut s'exprimer en fonction d'un facteur adimensionnel f appelé **coefficient de frottement** :

$$h_v = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (5.14)$$

où L est la longueur entre section d'entrée et de sortie, et D diamètre du tube.

Le coefficient de frottement est fonction du nombre de Reynolds $Re = \rho v D / \mu$, du rapport L/D , et éventuellement de la rugosité du tuyau pour des écoulements turbulents. En régime laminaire ($Re < 2000$), on montre que (Bird et al., 1960; Chassaing, 2000, voir aussi chapitre 6) :

$$f = \frac{64}{Re}, \quad (5.15)$$

Pour des nombres de Reynolds plus élevé l'écoulement devient turbulent. Pour calculer des ordres de grandeurs lorsque l'on a des Reynolds élevés, et un tube lisse, on pourra utiliser la formule de Blasius (Bird et al., 1960) :

$$f = \frac{0.3164}{Re^{1/4}} \quad \text{pour } 2.1 \times 10^3 < Re < 10^5 \quad (5.16)$$

Toujours pour des régimes turbulents, en tube lisse ou rugueux, on pourra utiliser la formule implicite

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4 \ln \left(\frac{1.25}{Re \sqrt{f}} + \frac{\epsilon}{3.7D} \right), \quad (5.17)$$

où ϵ est la taille caractéristique des aspérités du tube. Cette formule présente l'inconvénient d'être implicite, mais fournit des résultats continus sur l'ensemble du domaine turbulent.

De façon générale, on pourra utiliser le célèbre **diagramme de Moody** qui fournit le coefficient de perte de charge linéique dans tous les cas. On retiendra que la perte de charge est proportionnelle à la longueur de tube considérée.⁴

5.4.2.2 Pertes de charge singulières

Elles sont liées à des “accidents” ponctuels sur la tuyauterie : élargissements ou rétrécissements brusques, coudes, Us, vannes, robinets, clapets, tés. Ces pertes de charge s'expriment également à partir d'un coefficient de perte de charge adimensionnel e_v :

$$h_v = e_v \frac{v^2}{2g} \quad (5.18)$$

Le facteur e_v peut être calculé explicitement dans quelques cas peu nombreux, mais on a généralement recours à des formules empiriques ou à des abaques (Idelcik, 1969).

On pourra retenir les ordres de grandeurs suivants :

- Elargissement brusque : $e_v = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$, en référence à la vitesse amont (dans (5.18)),
- Rétrécissement brusque : $e_v = 0.45 \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)^2$, en référence à la vitesse aval,
- Tube plongeant dans un bac, $e_v = 1$,
- Coude, $e_v = 0.8$,
- Vanne ouverte, $e_v = 1.2$,

5.4.2.3 Exemple

Nous allons reprendre l'exemple du château d'eau en prenant en compte les pertes de charge linéiques : pour cela remarquons que la perte de charge impose une décroissance linéaire de la ligne de charge (Fig. 5.6). Comme altitude et vitesse sont constantes le long du tuyau, c'est la pression qui chute le long de l'écoulement : ainsi, la ligne piézométrique reste parallèle à la ligne de charge dans toute la conduite. La pression à l'entrée du tuyau est donc supérieure à p_{atm} : le fluide est retenu par cet excès de pression. Il apparaît donc clairement sur la figure (Fig. 5.6) que la charge dynamique, et donc la vitesse, est plus faible en présence de pertes de charges.

⁴Certains goutteurs pour l'arrosage sont basés sur ce principe : plusieurs dizaines de mètres de tuyau fin sont enroulés sur eux mêmes, de telle sorte que l'eau sort à très faible vitesse.

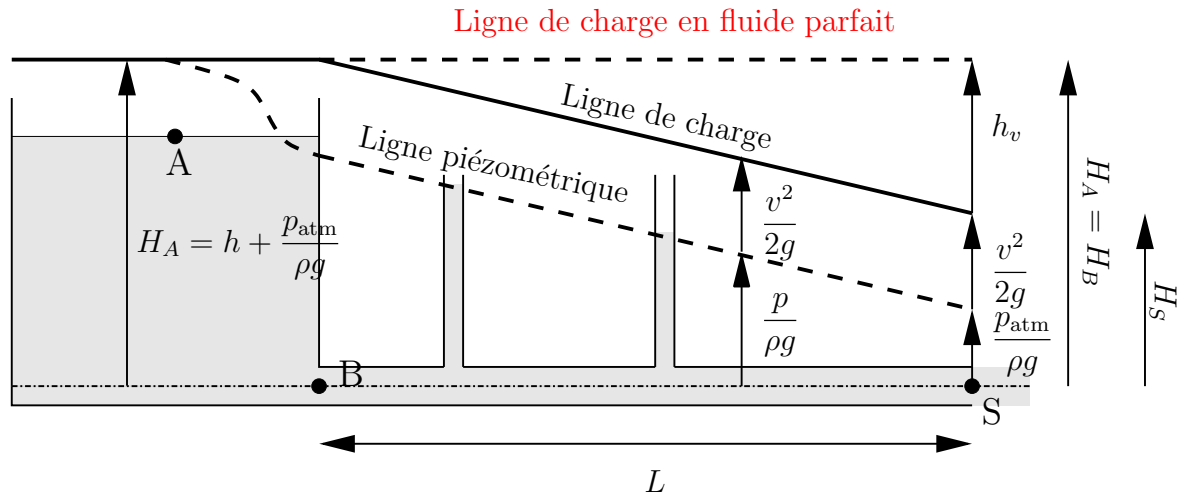


FIG. 5.6 – Ligne de charge et ligne piézométrique pour le problème du château d'eau ouvert sur une canalisation à l'atmosphère, en présence de pertes de charge.

Cette perte de vitesse peut être évaluée en écrivant les variations de charge entre les différents points de l'écoulement (Fig. 5.6).

Entre A et B, il n'y a pas de pertes donc $H_A = H_B$. Entre B et C, on a la perte de charge linéique donc $H_S - H_B = -h_v$ soit par conséquent

$$H_S = H_A - h_v$$

soit :

$$\frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + h - h_v \quad (5.19)$$

et la vitesse d'écoulement s'écrit donc :

$$v = \sqrt{2g(h - h_v)}$$

On constate bien qu'elle est plus faible que la vitesse prédite par la formule de Toricelli (5.7). En comparant cette dernière à l'expression (5.7), on voit que tout se passe comme si le niveau dans le château d'eau était diminué de la hauteur h_v . On remarquera que si la perte de charge atteint la hauteur h du château d'eau, le fluide ne peut plus s'écouler.⁵ la perte de charge étant proportionnelle à L , ceci se produira si la tuyauterie dépasse une certaine longueur, ce qui montre bien l'impossibilité pour un réservoir d'alimenter des maisons trop distantes.

⁵Comment y remédier ? indice : lire la section suivante et/ou regarder la formule (5.12).

Remarque importante : il convient de bien comprendre que ce n'est pas la vitesse (ou le débit) qui chute le long de la conduite, mais la pression ! En revanche la perte de charge conduit bien à une diminution de vitesse par rapport au fluide parfait.

5.4.3 Cas des machines tournantes : $\dot{W}_u \neq 0$

Lorsqu'une machine contenant des pales tournantes est placée entre l'entrée et la sortie, elle fournit de la puissance utile au fluide ($\dot{W}_u > 0$, pompe, ventilateur) ou en reçoit ($\dot{W}_u < 0$, éolienne, moulin à eau, turbine hydroélectrique). Dans le premier cas, la charge augmente, dans le second, elle diminue. Ainsi, une pompe permettra par exemple de monter du fluide d'une hauteur z_e à une hauteur z_s en augmentant sa charge. À l'inverse, une turbine hydroélectrique prélève une partie de l'énergie potentielle de pesanteur du fluide pour faire tourner une dynamo. La charge restante est essentiellement une charge dynamique (les cascades généralement visibles sous les barrages).

Il est important de comprendre que cette perte ou ce gain de charge est indépendant du caractère visqueux ou non du fluide.

Un exemple d'application est présenté Fig. 5.7 : on place une pompe ($\dot{W}_u > 0$) entre deux tuyauteries de même section. La différence de charge entre entrée et sortie s'écrit :

$$H_2 = H_1 + \frac{\dot{W}_u}{\rho g \dot{V}} = H_1 + h_u$$

avec $h_u > 0$. La conservation du débit implique que les vitesses sont égales en entrée et en sortie (la charge dynamique est donc constante). De plus, entrée et sortie sont à la même altitude et l'équation de charge s'écrit donc :

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + h_u$$

ce que reflète bien la différence d'élévation dans les deux tubes piezométriques. Conclusion : on a augmenté la pression dans l'écoulement. Cette augmentation de pression peut ensuite être exploitée pour élever le fluide par exemple.

Pour finir, les figures 5.8, 5.9 et 5.10 montrent des exemples de roues de moulins à eau, de turbines de barrages hydroélectriques et de pompes.

Exercices de réflexion : pourquoi la formule de Bernoulli ($H_s = H_e$) appliquée sur une ligne de courant entre l'entrée et la sortie d'une machine n'est-elle pas applicable ?

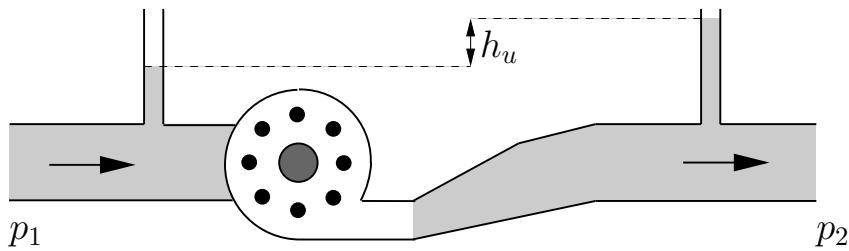


FIG. 5.7 – Augmentation de la pression dans un écoulement de même section en entrée et en sortie avec une pompe.

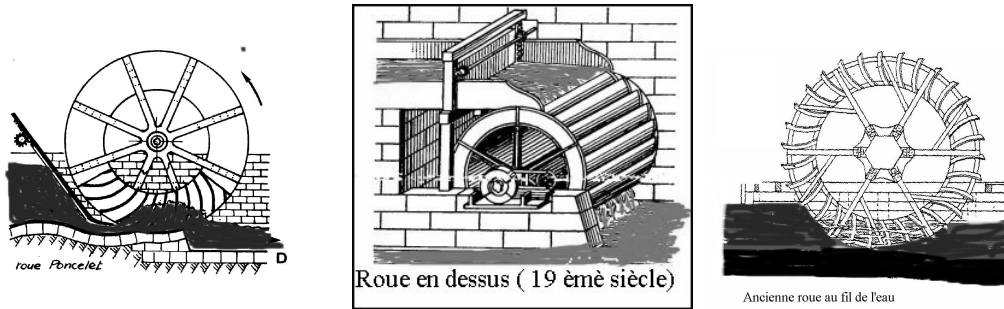


FIG. 5.8 – Exemples de roues de moulins à eau.

5.4.4 Applications aux réseaux de fluide

La formule (5.12) résume clairement le problème du dimensionnement d'un réseau de fluide : par exemple, pour compenser les pertes de charge entre l'entrée et la sortie d'une conduite, il faut apporter de la puissance utile, en d'autres termes il faut pomper ! Dans ce cas, on compense la perte de charge par un apport d'énergie ($\dot{W}_u = \Phi_v$). C'est par exemple le cas du transport de pétrole sur des milliers de km dans les oléoducs.

Si l'on veut faire monter du fluide d'une altitude z_e à une altitude $z_s > z_e$ dans une conduite de section constante (donc $v_s = v_e$), et à la même pression, il faut ici encore

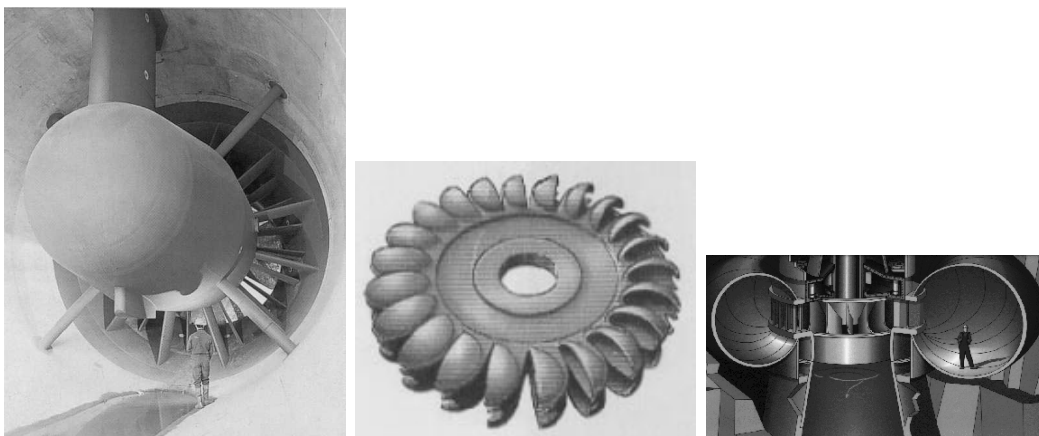


FIG. 5.9 – Exemples de turbines de barrages.

fournir de la puissance utile, même si les pertes de charge sont négligeables, donc il faut encore pomper ($\dot{W}_u = \rho g \dot{V}(z_s - z_e) > 0$). C'est ainsi par exemple que l'on pompe de l'eau dans un puit.

A l'inverse, on peut profiter de l'altitude d'un liquide ($z_e > z_s$) pour fournir de la puissance utile à une turbine ($\dot{W}_u = \rho g \dot{V}(z_e - z_s) < 0$). Une surpression à l'entrée peut également fournir du travail : c'est par exemple le cas de la soupape de la cocotte-minute qui tourne.

A l'échelle d'une installation en génie des procédés, il est important de **prendre en compte toutes les pertes de charge, linéiques et singulières** et de bien dimensionner la ou les pompes pour faire circuler le fluide avec le débit voulu. Lorsque la pompe est sous-dimensionnée, le fluide cesse de circuler ou bien revient même de la sortie vers l'entrée de la pompe. On dit alors qu'elle **refoule**.

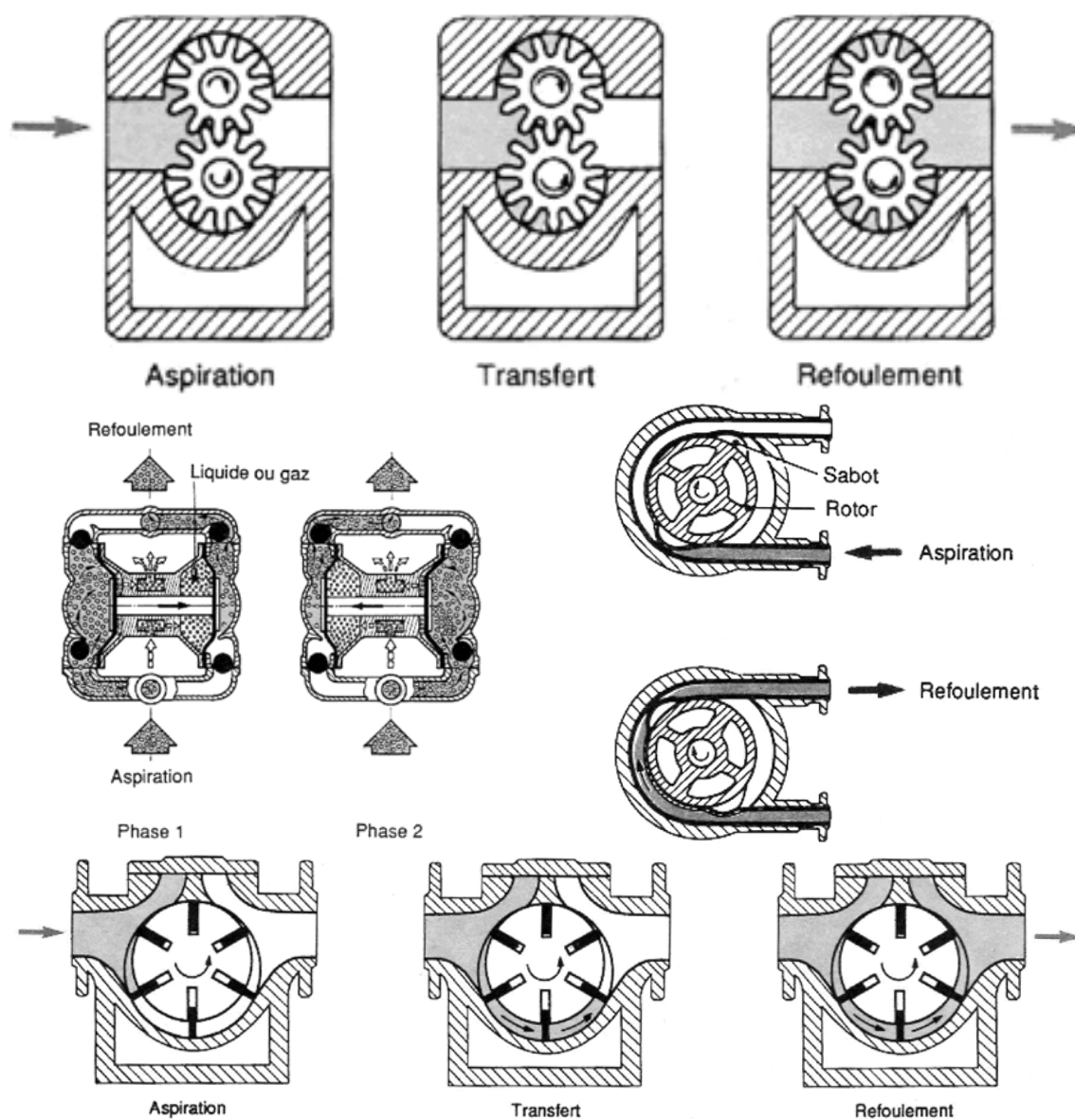


FIG. 5.10 – Exemples de pompes volumétriques : de haut en bas et de gauche à droite : pompe à engrenages extérieurs ; pompe à membranes ; pompe péristaltique ; pompe à palettes libres.

Chapitre 6

Fluides visqueux

6.1 Introduction

Le titre de ce chapitre est abusif dans la mesure où tous les fluides sont en réalité visqueux. La question est de savoir si nous devons prendre en compte ou non l'effet des forces visqueuses.

Nous commencerons par expliciter la contrainte visqueuse dans le cas des fluides dits “newtoniens” et en remplaçant cette expression dans les équations du mouvement, nous obtiendrons les équations dites de “Navier-Stokes”.

6.2 Le modèle de fluide newtonien

6.2.1 Approche par l'expérience de Couette

Reprenons l'expérience de Couette décrite page 46. Rappelons que l'expérimentation montre l'apparition d'un profil de vitesse linéaire au bout d'un certain temps, et que la force qu'il faut exercer sur la plaque pour la déplacer à une vitesse constante U_0 est proportionnelle à la variation de la vitesse dans la hauteur du fluide :

$$\frac{\mathbf{F}_v}{S} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{e}_x$$

Puisque la plaque bouge à vitesse constante, cette force est donc opposée à celle qu'exerce le fluide sur la plaque. Effectuons maintenant le bilan des forces sur une tranche de fluide comprise entre la plaque supérieure et une ordonnée z quelconque. On voit que :

- suivant z , il n'y a pas de mouvement, les seules forces sont les forces de pression,

- nous allons retrouver la loi de l'hydrostatique, comme si le fluide était immobile.
- l'accélération du fluide étant nulle (nous y reviendrons), la force tangentielle exercée par la plaque sur la tranche de fluide est égale à celle qu'exerce cette tranche de fluide sur la couche de fluide inférieure. Par conséquent, la contrainte tangentielle exercée en tout point par le fluide supérieur sur le fluide inférieur est constante dans l'épaisseur et vaut :

$$\sigma_t = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{e}_x$$

La contrainte normale exercée par la couche supérieure sur la couche inférieure est celle de pression et nous pouvons donc écrire la contrainte totale sous la forme :

$$\sigma = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{e}_x - p \mathbf{e}_z$$

Remarquons que le vecteur normal sortant à la couche de fluide inférieure est \mathbf{e}_z , et la relation ci-dessus nous fournit la troisième colonne du tenseur des contraintes (qui rappelons-le, est la force exercée par unité de surface normale à Oz). De plus nous savons que la force de pression est isotrope (elle est toujours orthogonale à la surface considérée). Le tenseur des contraintes s'écrit donc :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p & ? & \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ ? & -p & 0 \\ ? & ? & -p \end{bmatrix}$$

Dans la direction y , il n'existe pas d'autre force que celle de pression (par symétrie de l'écoulement), par conséquent la deuxième colonne est nulle en dehors du terme $-p$. Enfin examinons la force tangentielle exercée sur une surface perpendiculaire à l'écoulement : l'existence d'une composante suivant y imposerait un mouvement dans cette direction, et n'existe donc pas, par conséquent $\sigma_{xy} = 0$. Enfin, on peut démontrer très généralement que le tenseur des contraintes est forcément symétrique, et nous obtenons finalement :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 & -p & 0 \\ \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

6.2.2 Equations du modèle newtonien

L'expérience de Couette nous montre que la force visqueuse naît de l'existence de couches de fluide voisines se déplaçant à des vitesses différentes. L'expression $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ est une dérivée spatiale d'une composante de la vitesse. Voyons combien de dérivées spatiales de la vitesse nous pouvons définir dans le cas général : il y a trois composantes u, v, w que nous pouvons chacune dériver par rapport aux trois variables d'espace x, y, z , ce qui fait 9 dérivées. On les regroupe dans le **tenseur gradient**, qui s'écrit, en coordonnées cartésiennes :

$$\overline{\overline{\text{grad} \mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Il est vraisemblable que le tenseur des contraintes visqueuses pour un fluide newtonien fasse intervenir ce tenseur. En examinant le tenseur (6.1) obtenu pour l'expérience de Couette, il est facile de voir que la relation est la suivante :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\overline{\overline{\mathbf{I}}} + \underbrace{\mu \left({}^T\overline{\overline{\text{grad} \mathbf{v}}} + \overline{\overline{\text{grad} \mathbf{v}}} \right)}_{\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}_v}}} \quad (6.3)$$

Un fluide dont suivant cette loi sera dit newtonien. Attention, beaucoup de fluides ne sont pas newtoniens. Citons en vrac les pâtes et suspension de façon générale, la plupart des fluides alimentaires (crème, yaourt, ketchup), le sang, les polymères à l'état liquide ...

6.3 Equations de Navier-Stokes

Il nous est maintenant possible d'explicitier le terme visqueux dans toutes les équations présentées jusqu'alors. Nous nous cantonnerons au fluide incompressible. Ainsi l'équation locale (4.31) devient, en écrivant $\mathbf{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}_v}}$ à l'aide des formules d'analyse vectorielle rappelées en annexe B :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (6.4)$$

Cette équation, associée à la conservation de la masse

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (6.5)$$

constitue les **équations de Navier-Stokes incompressible**.¹

6.3.1 Adimensionnalisation

Dans tout écoulement, on peut trouver une longueur de référence : le diamètre d'un tuyau, la longueur d'une plaque, le diamètre d'une sphère, la dimension transverse moyenne (perpendiculaire à l'écoulement) d'un véhicule. De même, on peut trouver une vitesse de référence : vitesse incidente sur un obstacle, vitesse calculée à partir d'un débit. ... Posons L cette longueur et V cette vitesse, et rapportons toutes les variables spatiales ainsi que le champ de vitesse respectivement à la longueur et la vitesse de référence (on notera les variables adimensionnelles avec une étoile) :

$$\begin{aligned} x &= Lx^* & y &= Ly^* & z &= Lz^* \\ v_x &= Vv_x^* & v_y &= Vv_y^* & v_z &= Vv_z^* \end{aligned}$$

On rapporte également le temps à un temps de référence T : ce peut être par exemple une période pour un écoulement oscillant ou un temps caractéristique de l'application d'une contrainte externe à un fluide. On pose

$$t = Tt^*$$

Enfin, on peut, pour des applications bien spécifiques, ramener la pression à une grandeur de référence p_0 , par exemple la pression atmosphérique

$$p = p_0 p^*,$$

mais dans la plupart des cas, on prendra comme pression de référence p_0 la pression dynamique (voir le chapitre sur Bernoulli) ρV^2 . En remplaçant les variables originales par ces variables dans l'équation de Navier-Stokes (6.4), on obtient

¹Qui constitue le modèle théorique de base pour la plupart des écoulements. La plupart des écoulements compressibles peuvent être traités par les équations d'Euler, en négligeant donc le caractère visqueux du fluide. Les équations de NS compressibles sont utilisées dans un nombre de cas assez réduit. Notons par ailleurs que l'existence et l'unicité de solutions aux équations de NS constituent l'objet de l'un des dix problèmes proposés par la fondation Clay, récompensé par un million de dollars... ce qui n'empêche pas le chercheur et l'ingénieur d'utiliser ces équations au quotidien dans un large éventail d'applications. Il est intéressant de noter qu'il s'agit pourtant d'un problème de mécanique classique, qui n'a pas encore livré tous ses mystères.

$$\frac{V}{T} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{V^2}{L} (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\frac{p_0}{\rho L} \frac{\mathbf{grad}^* p^*}{\rho} + \mathbf{g} + \frac{\nu V}{L^2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*,$$

soit, en multipliant toute l'équation par L/V^2 ,

$$\text{St} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\frac{1}{\text{Eu}} \mathbf{grad}^* p^* + \text{Fr} \frac{\mathbf{g}}{g} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*, \quad (6.6)$$

avec les nombres adimensionnels :

Reynolds	$\text{Re} = \frac{LV}{\nu}$	$\frac{\text{Inertie du fluide}}{\text{Forces visqueuses}}$
Strouhal	$\text{St} = \frac{L}{VT}$	$\frac{\text{Temps caractéristique du mouvement du fluide}}{\text{Temps caractéristique de la sollicitation}}$
Euler	$\text{Eu} = \frac{\rho V^2}{p_0}$	$\frac{\text{Pression dynamique}}{\text{Pression statique}}$
Froude	$\text{Fr} = \frac{gL}{V^2}$	$\frac{\text{Poids}}{\text{Inertie}}$

Ces nombres adimensionnels sont très importants car leur calcul fournit déjà des informations très importantes sur l'écoulement, sans avoir à résoudre les équations de NS. Le plus important de tous est le nombre de Reynolds qui quantifie l'importance de l'inertie du fluide par rapport aux forces visqueuses.

6.3.2 Classification des écoulements

Les écoulements se comportent de façon très différente selon la valeur du nombre de Reynolds.

- Pour des nombres de Reynolds très faibles, l'écoulement est dominé par les forces visqueuses. Visuellement, on observe un écoulement très “pénible”, que l'on imagine difficile à mettre en mouvement, et facile à arrêter. Ce type d'écoulement est le moins fréquent dans la nature, mais intervient par exemple dans des problèmes de lubrification, dans des suspensions de petites particules. On parle **d'écoulement de Stokes** ou **écoulement rampant**. Nous verrons que ce type d'écoulement est prévu par la réduction des équations de Navier-Stokes dans la limite $\text{Re} \ll 1$.
- pour des Reynolds de l'ordre de l'unité, l'écoulement se “complique”, par exemples des recirculations apparaissent en aval des obstacles ou dans les singularités d'un tuyauterie (coudes, rétrécissements, ...). L'écoulement reste malgré tout stationnaire et laminaire sauf bien sûr s'il est sollicité de façon instationnaire. Pour des écoulements autour d'obstacles symétriques, on note une dissymétrisation amont-aval.
- Pour des Reynolds encore supérieurs, des variations temporelles périodiques apparaissent dans le champ de vitesse.

- Pour des Reynolds très grands, l'écoulement est complètement déstabilisé, soit dans une certaine zone de l'espace (dans la couche limite et le sillage des obstacles), soit dans tout l'espace (dans un tube) et au champ de vitesses principal (observable macroscopiquement) se superposent des fluctuations aléatoires à plusieurs échelles : c'est la turbulence.

La classification précédente est très réductrice, l'évolution de l'écoulement dépendant de la géométrie et des conditions aux limites. Cependant on retrouve des points communs dans une même famille d'écoulements et quelques cas limites importants peuvent être traités de façon analytique :

- les écoulements rampants (à faible Reynolds) : ils permettent le calcul des forces hydrodynamiques dans de nombreux cas, et débouchent sur la théorie des suspensions, des milieux poreux, ... Les équations de Navier-Stokes se simplifient grandement car le terme $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ se simplifie.
- les problèmes de couches limites laminaires, utilisables tant que l'écoulement n'est ni déstabilisé, ni décollé de la paroi (comme c'est le cas pour les profils épais style cylindres ou sphères). On peut calculer rigoureusement le champ de vitesses dans la couche limite.
- En régime turbulent, les problèmes de couche limite en écoulement ouvert, et de couche turbulente à la paroi des tuyaux admettent des solutions approchées. Guyon et al. (2001)

Nous traiterons donc ces problèmes séparément. Notons tout d'abord qu'un certain nombre de problèmes "classiques" peuvent se résoudre analytiquement, en raison de la simplicité de la géométrie. Nous allons aborder certains de ces problèmes dès maintenant.

6.4 Écoulements visqueux classiques

6.4.1 Écoulement de Couette

Nous sommes désormais familiers avec cet écoulement. Essayons de retrouver les résultats précédents d'après les équations de Navier-Stokes.

Notons tout d'abord que le champ des vitesses est orienté suivant x . On a donc $\mathbf{v} = [v_x(x, y, z), 0, 0]$. L'équation de conservation de la masse fournit alors

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Donc v_x ne dépend que de y et z . On suppose l'écoulement d'extension infinie suivant y et par conséquent v_x est indépendant de y . Le champ de vitesse s'écrit donc

finalement $\mathbf{v} = (v_x(z), 0, 0)$.

Remarquons alors que le terme $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ est identiquement nul. En effet le produit scalaire formel $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ se réduit à $v_x \frac{\partial}{\partial x}$ et la vitesse ne dépend pas de x . Ce terme disparaît donc à priori tant que l'écoulement reste dans la direction x , sans hypothèse sur le nombre de Reynolds. L'écoulement étant stationnaire, l'équation de Navier-Stokes se réduit donc à :

$$0 = -\mathbf{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (6.7)$$

soit en projection sur les 3 axes :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 v_x}{dz^2} \quad (6.8)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (6.9)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad (6.10)$$

où nous avons écrit un d droit dans la première équation, puisque v_x ne dépend que de z . La deuxième équation nous indique que p ne dépend que de x et z . La troisième équation s'intègre simplement en

$$p(x, z) = -\rho g z + K(x)$$

qui indique que la pression varie comme en hydrostatique suivant la direction de la pesanteur, indépendamment de l'écoulement. Par ailleurs, aucun gradient de pression parallèlement aux plaques n'est appliqué à l'écoulement, et la pression est donc indépendante de x ,² donc $K(x) = K$. La première équation s'écrit donc

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dz^2} = 0 \quad (6.11)$$

et on obtient donc, avec les conditions aux limites $v_x(0) = 0$ et $v_x(h) = U_0$, un profil de vitesses linéaire :

$$v_x(z) = U_0 \frac{z}{h} \quad (6.12)$$

²Les écoulements de Couette réels sont réalisés dans des canaux annulaires. Dans ce cas on conçoit aisément que la pression ne puisse pas varier le long de l'écoulement, puisque ce dernier se referme sur lui-même...

6.4.2 Écoulement de Poiseuille

6.4.2.1 Calcul de l'écoulement

Dans cet écoulement, le moteur de l'écoulement n'est plus un cisaillement (donc la force visqueuse), mais un gradient de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite. On peut par exemple imposer une surpression à l'entrée avec une pompe ou un château d'eau, ou une dépression à la sortie par une aspiration. Dans tous les cas on notera p_e et p_s les pressions respectivement à l'entrée et à la sortie de la conduite de longueur L .

Nous traiterons directement le cas d'un tuyau cylindrique d'axe z . On note r et θ les directions radiales et orthoradiales. Le champ de vitesse est dirigée uniquement suivant z donc $v_\theta = 0$ et $v_r = 0$ et donc $\mathbf{v} = [0, 0, v_z(r, \theta, z)]$.

L'équation de conservation de la masse $\text{div } \mathbf{v}$ fournit alors

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

On suppose de plus que l'écoulement est symétrique par rapport à l'axe du tube et donc v_z ne dépend finalement que de r . Il est facile de voir que comme pour l'écoulement de Couette, le terme $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ est identiquement nul, et en négligeant de plus la pesanteur, les équations de Navier-Stokes se réduisent à

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \tag{6.13}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial \theta} \tag{6.14}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \tag{6.15}$$

La pression ne dépend donc que de z , et la troisième équation s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

Dans cette équation le membre de gauche est une fonction de z seulement, et celui de droite est une fonction de r seulement. Leur égalité $\forall r, \forall z$ indique donc que les deux termes sont indépendants de r et de z , et sont donc égaux à une constante A . L'équation (6.11) revient donc à un système de deux équations différentielles :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = A, \quad (6.16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{A}{\mu}. \quad (6.17)$$

La pression varie donc linéairement le long de l'écoulement, et avec les conditions aux limites en pression à l'entrée et à la sortie, on obtient la constante A :

$$A = \frac{p_s - p_e}{L} \quad (6.18)$$

Une première intégration de l'équation (6.17) fournit alors

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{A}{2\mu} r + \frac{B}{r} \quad (6.19)$$

la constante d'intégration B est forcément nulle sans quoi la vitesse deviendrait infinie sur l'axe du tube. En utilisant ensuite la condition d'adhérence sur la paroi du tube $v_z(R) = 0$, l'intégration de (6.19) fournit :

$$v_z(r) = \frac{A}{4\mu} (r^2 - R^2)$$

soit en explicitant la constante A grâce à (6.18) :

$$v_z(r) = \frac{p_e - p_s}{4\mu L} (R^2 - r^2) \quad (6.20)$$

On voit donc que le profil de vitesses est parabolique, maximum sur l'axe, et que $v_z > 0$ si $p_e > p_s$. L'écoulement est donc orienté des fortes pressions vers les faibles.

6.4.2.2 Calcul du débit. Perte de charge en ligne

On peut en déduire le débit à travers le tube en intégrant le profil de vitesse sur la section droite :

$$Q = \int_0^R v_z(r) 2\pi r \, dr = \frac{p_e - p_s}{4\mu L} 2\pi \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr$$

L'intégrale se calcule facilement avec le changement de variable $y = (R^2 - r^2)/R^2$:

$$\int_0^R (R^2 - r^2)r \, dr = \int_1^0 R^2 y \left(-\frac{1}{2}R^2 \right) dy = \frac{R^4}{4}$$

On obtient donc finalement le débit, en fonction du rayon ou de la section du tube :

$$Q = \frac{(p_e - p_s) \pi R^4}{8\mu L} = \frac{(p_e - p_s) S^2}{8\pi\mu L} \quad (6.21)$$

On peut en déduire la vitesse moyenne :

$$v_m = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{(p_e - p_s) R^2}{8\mu L} \quad (6.22)$$

Pour une vitesse moyenne donnée v_m , on peut donc en déduire la chute de pression le long de l'écoulement, qui est aussi la perte de charge en ligne pour un tuyau horizontal de section constante :

$$p_e - p_s = \frac{8\mu L v_m}{R^2}$$

En ramenant cette chute de pression à la pression dynamique $1/2\rho v_m^2$, et en introduisant le nombre de Reynolds $\text{Re} = \rho v_m D / \mu$ on obtient :

$$\frac{p_e - p_s}{\frac{1}{2}\rho v_m^2} = 16 \frac{\mu L}{\rho R^2 v_m} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{L}{D}$$

On voit donc, comme annoncé dans la section 5.4.2, que la perte de charge en ligne est donnée par :

$$\Delta p = f \frac{1}{2} \rho v_m^2 \frac{L}{D}$$

avec f coefficient de frottement $= 64/\text{Re}$. Ce dernier résultat est valable tant que l'hypothèse de mouvement seulement suivant z est vérifiée, autrement dit que le mouvement est laminaire. Dans la pratique, cela est vérifié pour $\text{Re} < 2000$, valeur au-delà de laquelle des fluctuations turbulentes apparaissent.

6.4.2.3 Application aux milieux poreux

La seconde expression du débit dans (6.21) est intéressante et permet de répondre à la question suivante : pour un même gradient de pression imposé, vaut-il mieux

utiliser une conduite de section S ou 2 conduites de section $S/2$ (de façon à garder une section totale constante) ? La réponse est dans l'exposant 2 de la surface S : dans le premier cas on trouve un débit total Q_1 donné par (6.21), dans le second un débit total $Q_2 = Q_1/4 + Q_1/4 = Q_1/2$, donc deux fois inférieur. Si on prend n tuyaux de section S/n , on obtiendra un débit $Q_n = Q_1/n^2 + Q_1/n^2 \cdots + Q_1/n^2 = Q_1/n$. Il est donc plus difficile de faire couler un fluide dans plusieurs petits tuyaux que dans un gros, à section totale constante.

Calculons la vitesse moyenne $v_m = Q_n/S$ pour n tuyaux de section $S_n = S/n$ à partir de (6.21) :

$$v_m = \frac{Q_n}{S} = \frac{Q_1}{nS} = \frac{(p_e - p_s)}{8\pi\mu L} \frac{S}{n} = -\frac{S_n/8\pi}{\mu} \frac{(p_s - p_e)}{L} \quad (6.23)$$

La dernière expression est à la base de la loi de Darcy, qui décrit de façon simplifiée l'écoulement dans le milieu poreux, qui à l'échelle microscopique peut être vu comme un empilement de petits tuyaux de sections individuelles S_n . Dans ces conditions $(p_s - p_e)/L$ est le gradient de pression local, et la loi de Darcy s'écrit :

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \mathbf{grad} p \quad (6.24)$$

En comparant cette expression à (6.23), on voit que k correspond à $S_n/8\pi$ et est homogène à une surface. Cette grandeur s'appelle la perméabilité du milieu poreux.

6.4.3 Écoulements unidirectionnels.

Prenons le cas général d'un écoulement unidirectionnel, appelons x l'axe de l'écoulement, y l'axe perpendiculaire au plan formé par x et la pesanteur et z de façon à former un trièdre direct. Il est facile de voir que, comme pour les écoulements de Couette et de Poiseuille, le terme en $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ de l'équation de Navier-Stokes est identiquement nul, et que la projection de cette dernière sur les 3 axes s'écrit

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (6.25)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (6.26)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \quad (6.27)$$

Chapitre 7

Ecoulements rampants



7.1 Equations

En prenant la limite $Re \ll 1$ dans l'équation (6.6), le terme $(\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^*$ devient négligeable, et on obtient :

$$Re \, St \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} = -\frac{Re}{Eu} \mathbf{grad}^* p^* + Re \, Fr \frac{\mathbf{g}}{g} + \nabla^{*2} \mathbf{v}^*, \quad (7.1)$$

Dans la plupart des problèmes, l'écoulement est permanent et le terme instationnaire disparaît. Si l'écoulement n'est pas permanent, par exemple si une sollicitation extérieure est périodique (plaque vibrante ou glissante périodiquement), on peut quand même négliger le terme instationnaire à condition que le produit $Re \, St$ soit très petit devant 1, soit $St \ll 1/Re$, ou bien $T \gg L^2/\nu$ qui donne une borne inférieure du temps caractéristique T de la sollicitation.

De façon similaire, la pesanteur sera négligée ou non selon la valeur du produit $Re \, Fr$. Nous ne nous intéresserons dans ce qui suit seulement à des problèmes stationnaires ou considérés comme tels, sans influence de la pesanteur. Sous forme dimensionnelle, l'équation de Navier-Stokes se simplifie alors en :

$$\mathbf{grad} \, p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \quad (7.2)$$

Cette équation, comme sa forme générale (7.1) est beaucoup plus simple que l'équation originale, car le terme non-linéaire $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ a disparu. Les équations aux dérivées partielles linéaires possèdent de nombreuses propriétés mathématiques importantes, et un grand éventail d'outil mathématique est utilisable pour leur résolution.

Chapitre 8

Couche limite

UNDER CONSTRUCTION

On s'intéresse dans cette partie à des écoulements tels que $\mathcal{R} \gg 1$, mais suffisamment petits pour que l'écoulement reste laminaire et stationnaire. Dans une telle configuration, l'écoulement à une direction privilégiée.

Annexe A

Puissance du poids et premier principe

Il s'agit d'évaluer l'intégrale :

$$I = \iiint_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dV$$

sur le tube de courant. Remarquons que la pesanteur \mathbf{g} dérive d'un gradient. Si l'on oriente l'axe Oz vers le haut, nous avons $\mathbf{g} = \mathbf{grad}(-gz)$. En utilisant de plus la formule $\text{div}(a\mathbf{u}) = a \text{div} \mathbf{u} + (\mathbf{grad} a) \cdot \mathbf{u}$, nous avons :

$$\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} = -\text{div}(\rho g z \mathbf{v}) + g z \text{div}(\rho \mathbf{v})$$

Utilisons de plus l'équation de conservation de la masse pour évaluer $\text{div}(\rho \mathbf{v})$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} &= -\text{div}(\rho g z \mathbf{v}) - g z \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= -\text{div}(\rho g z \mathbf{v}) - \frac{\partial(\rho g z)}{\partial t} \end{aligned}$$

en remarquant que gz n'est pas une fonction du temps. Par conséquent l'intégrale I devient :

$$I = - \iiint_V \text{div}(\rho g z \mathbf{v}) \, dV - \iiint_V \frac{\partial(\rho g z)}{\partial t} \, dV$$

La première intégrale peut être transformée en intégrale de surface par la formule d'Ostrogradski, soit :

$$\begin{aligned} I &= - \iint_S \rho g z \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dV - \iiint_V \frac{\partial(\rho g z)}{\partial t} dV \\ &= - \iint_S \rho g z \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dV - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho g z dV \end{aligned}$$

L'intégrale de surface est nulle sur toutes les parois solide fixes en raison de la condition d'étanchéité, et elle se réduit aux surfaces d'entrée S_e , de sortie S_s et des pales S_u . En supposant que sur les surfaces d'entrée et sortie, z , ρ et \mathbf{v} sont à peu près constants, on obtient :

$$I = \rho_e g z_e v_e S_e - \rho_s g z_s v_s S_s - \iint_{S_u} \rho g z \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dV - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho g z dV$$

En introduisant le débit massique $\dot{M} = \rho v S$, on obtient :

$$I = \dot{M}_e g z_e - \dot{M}_s g z_s - \iint_{S_u} \rho g z \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dV - \frac{dE_p}{dt}$$

L'intégrale sur S_u est une contribution supplémentaire de la puissance des pales et peut donc être intégrée à la puissance utile \dot{W}_u . Ainsi, la formule (4.25) s'écrit finalement

$$\frac{d}{dt}(U + K + E_p) = \dot{M}_e \left(h_e + \frac{v_e^2}{2} + g z_e \right) - \dot{M}_s \left(h_s + \frac{v_s^2}{2} + g z_s \right) + \dot{W}_u + \dot{Q} \quad (\text{A.1})$$

Annexe B

Quelques formules d'analyse vectorielle

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\overline{\overline{\mathbf{grad} \mathbf{v}}}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} + \mathbf{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} \quad (\text{B.1})$$

B.1 Formules de Green et Ostrogradski

$$\iiint_V \mathbf{grad} a \, dV = \iint_S a \mathbf{n} \, dS \quad (\text{B.2})$$

$$\iiint_V \text{div} \mathbf{u} \, dV = \iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{B.3})$$

$$\iiint_V \text{div} \overline{\overline{\mathbf{T}}} \, dV = \iint_S \overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{B.4})$$

Conséquence (obtenue à partir de (B.2) avec $a = 1$) :

$$\iint_{S_{\text{fermée}}} \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (\text{B.5})$$

B.2 Dérivation de produits

$$\operatorname{div} (a\mathbf{u}) = a \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{grad} a \cdot \mathbf{u} \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{grad} (ab) = a \mathbf{grad} b + b \mathbf{grad} a \quad (\text{B.7})$$

$$\operatorname{div} (\overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{u}) = (\operatorname{div} \overline{\overline{\mathbf{T}}}) \cdot \mathbf{u} + \overline{\overline{\mathbf{T}}} : \overline{\overline{\mathbf{grad}}} \mathbf{u} \quad (\text{B.8})$$

(le produit tensoriel $\overline{\overline{\mathbf{A}}} : \overline{\overline{\mathbf{B}}}$ est le scalaire $\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$. C'est une généralisation aux tenseurs du produit scalaire de deux vecteurs).

B.3 Dérivée particulière

La variation d'une grandeur locale $g(x, y, z, t)$ associée à un petit volume de fluide se déplaçant d'un point de coordonnées $\mathbf{r} = (x, y, z)$ à un point $\mathbf{r} + d\mathbf{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$ pendant un intervalle de temps dt est :

$$dg = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \quad (\text{B.9})$$

Mais on a $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ et par conséquent :

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{grad} g \cdot \mathbf{v} \quad (\text{B.10})$$

On voit que la variation de g est liée à deux causes : sa variation temporelle intrinsèque $\partial g / \partial t$ (par exemple l'échauffement lié à une compression locale) et sa variation à cause du déplacement de la particule fluide dans un champ inhomogène (la particule chauffe parce qu'elle voyage d'une zone froide vers une zone chaude par exemple). La grandeur ci-dessus est appelée dérivée particulière. On la note souvent Dg/Dt pour bien spécifier que g est une fonction de plusieurs variables, et ne pas la confondre avec la dérivée classique d'une fonction d'une variable.

Si on applique l'équation (B.10) aux 3 composantes d'un vecteur \mathbf{w} il est facile de voir que la relation se généralise à l'aide du tenseur gradient en :

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \overline{\overline{\mathbf{grad}}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{B.11})$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement utilise une telle relation où le vecteur \mathbf{w} n'est autre que la vitesse \mathbf{v} .

Si g est une grandeur extensive massique, on démontre facilement l'identité suivante, en utilisant l'équation de conservation de la masse :

$$\rho \frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial (\rho g)}{\partial t} + \text{div} (\rho g \mathbf{v}) \quad (\text{B.12})$$

Cette formule est utile pour exprimer les équations sous forme dite “conservative”, en particulier pour la conservation de l'énergie. On reconnaît, dans l'intérieur de l'opérateur divergence, l'expression d'un flux convectif.

Annexe C

Rappel sur les forces d'inertie

C.1 Rappel : composition des accélérations



On considère un repère \mathcal{R}' lié à O' en mouvement par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R} lié à O . On veut écrire une relation entre les accélérations dans ces deux référentiels. On montre que pour un point A en mouvement quelconque :

$$\mathbf{a}_{A/\mathcal{R}} = \mathbf{a}_{A/\mathcal{R}'} + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c \quad (\text{C.1})$$

où \mathbf{a}_e est l'accélération d'entraînement :

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{A} + \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{A}). \quad (\text{C.2})$$

Le premier terme est lié à la translation, le second à l'accélération angulaire, le troisième à la rotation, de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} . L'accélération de Coriolis \mathbf{a}_c s'écrit :

$$\mathbf{a}_c = 2\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \mathbf{v}_{A/\mathcal{R}'}. \quad (\text{C.3})$$

Remarque importante : pour un point A immobile dans le référentiel non galiléen \mathcal{R}' , l'accélération de Coriolis est nulle. Ce sera le cas d'un fluide immobile dans \mathcal{R}' .

C.2 Forces d'inertie

On cherche à voir dans quelle mesure on peut écrire la loi de la dynamique dans un référentiel non galiléen. Commençons par l'écrire dans le référentiel galiléen \mathcal{R} pour un point A de masse m :

$$m\mathbf{a}_{A/\mathcal{R}} = \Sigma \mathbf{F} \quad (\text{C.4})$$

soit en vertu de (C.1) :

$$m\mathbf{a}_{A/\mathcal{R}'} = \Sigma \mathbf{F} - m\mathbf{a}_e - m\mathbf{a}_c \quad (\text{C.5})$$

On voit donc que la loi de la dynamique est transposable dans \mathcal{R}' sous réserve de prendre en compte deux forces supplémentaires \mathbf{f}_{ie} et \mathbf{f}_{ic} dites «d'inertie d'entraînement» et «d'inertie de Coriolis». La force d'entraînement est couramment ressentie dans une voiture qui freine ou qui prend un virage, dans un manège forain, dans un ascenseur au démarrage ou à l'arrêt. Elle est également mise à profit dans les vols paraboliques, où elle compense exactement la pesanteur à l'intérieur de la cabine de l'avion.

La force d'inertie de Coriolis est responsable notamment de la déviation vers l'est (pendule de Foucault) et du mouvement des masses nuageuses. En revanche, contrairement à une idée reçue *elle n'est pas* responsable du tourbillon de vidange dans un lavabo, et dont le sens de rotation serait prétendument opposé dans les deux hémisphères.

Annexe D

Démonstration du théorème de l'énergie cinétique

Reprenons l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement (4.31) en utilisant la formule (B.1) et faisons-en le produit scalaire par le vecteur vitesse \mathbf{v} . Nous obtenons (en remarquant que le produit mixte $(\mathbf{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$ est nul :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} \cdot \mathbf{v} = - \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{div} \overline{\overline{\sigma}}_v) \cdot \mathbf{v} \quad (\text{D.1})$$

Examinons tout d'abord le premier membre. Nous avons tout d'abord :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{v^2}{2} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) - \frac{v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

Nous avons également, en utilisant (B.6) :

$$\rho \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{div} \left(\rho \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \right) - \frac{v^2}{2} \mathbf{div} (\rho \mathbf{v})$$

et le premier membre s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) + \mathbf{div} \left(\rho \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \right) - \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div} (\rho \mathbf{v}) \right)}_{\substack{= 0 \text{ d'après} \\ \text{l'équation de} \\ \text{conservation de} \\ \text{la masse (4.29)}}} \frac{v^2}{2} \end{aligned}$$

Examinons maintenant le second membre de (D.1). On a en utilisant (B.6) et (B.8) :

$$-\mathbf{grad} p \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{div} \bar{\bar{\sigma}}_v) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{div} (p\mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{div} (\bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \mathbf{v}) + p \mathbf{div} \mathbf{v} - \bar{\bar{\sigma}}_v : \bar{\bar{\mathbf{grad}}} \mathbf{v}$$

L'équation (D.1) s'écrit donc finalement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) + \mathbf{div} \left(\rho \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \right) = -\mathbf{div} (p\mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{div} (\bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \mathbf{v}) + p \mathbf{div} \mathbf{v} - \bar{\bar{\sigma}}_v : \bar{\bar{\mathbf{grad}}} \mathbf{v} \quad (\text{D.2})$$

En intégrant cette équation sur tout le volume V , en utilisant les formules de Green-Ostrogradski (B.3), (B.4), et en rappelant que le tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$ est symétrique, on obtient :

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) dV + \iint_S \rho \frac{v^2}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ = \underbrace{- \iint_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \iiint_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \iint_S (\bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS}_{\substack{\text{Puissance des} \\ \text{forces extérieures} \\ \bar{W}}} \\ + \underbrace{\iiint_V p \mathbf{div} \mathbf{v} dV}_{\substack{\text{Puissance des} \\ \text{forces intérieures} \\ \text{de pression}}} - \underbrace{\iiint_V \bar{\bar{\sigma}}_v : \bar{\bar{\mathbf{grad}}} \mathbf{v} dV}_{\substack{\text{Puissance des} \\ \text{forces visqueuses} \\ \text{intérieures} \\ = -\Phi_v}} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

qui est bien l'équation (4.27). Nous montrerons dans le cours sur les fluides visqueux que le produit $\bar{\bar{\sigma}}_v : \bar{\bar{\mathbf{grad}}} \mathbf{v}$ est toujours positif, si bien que la puissance des forces visqueuses intérieure est toujours négative. C'est donc un puit d'énergie cinétique pour le fluide.

Annexe E

Diverses formes de l'équation de conservation de l'énergie

En soustrayant le théorème de l'énergie cinétique (D.2) du premier principe sous forme locale (4.32), on obtient

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = -p \text{div} \mathbf{v} + \overline{\overline{\sigma_v}} : \overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{v} - \text{div} \mathbf{q} \quad (\text{E.1})$$

Les deux premiers termes du membre de droite représentent la puissance des forces intérieures, respectivement de pression (réversible) et visqueuses (irréversible). Comme indiqué dans l'annexe précédente, la puissance des forces visqueuses intérieures $\overline{\overline{\sigma_v}} : \overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{v}$ est toujours positive, et nous le noterons désormais ϕ_v . Ce terme contribue toujours à une augmentation de l'énergie interne du fluide, ce qui se traduit par exemple de l'échauffement des fluides de lubrification, cisailé entre deux pièces mobiles.

Le membre de gauche peut être également écrit $\rho Du/Dt$, où $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}$ est la dérivée particulaire, d'où :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \text{div} \mathbf{v} + \phi_v - \text{div} \mathbf{q} \quad (\text{E.2})$$

ou encore, sous forme conservative, en utilisant (B.12) :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \mathbf{v}) = -p \text{div} \mathbf{v} + \phi_v - \text{div} \mathbf{q} \quad (\text{E.3})$$

Les équations qui suivent sont toutes issues de cette dernière, mais utilisent des

fonctions d'état autres que l'énergie interne. On peut par exemple utiliser l'enthalpie, donnée sous forme différentielle par :

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad (\text{E.4})$$

et par conséquent

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad (\text{E.5})$$

La conservation de la masse s'écrit par ailleurs

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

et l'équation (E.5) s'écrit donc également

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (\text{E.6})$$

En remplaçant cette expression dans (E.2), on obtient donc :

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \phi_v - \operatorname{div} \mathbf{q} \quad (\text{E.7})$$

ou encore, sous forme conservative, en utilisant (B.12) :

$$\frac{\partial (\rho h)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho h \mathbf{v}) = \frac{Dp}{Dt} + \phi_v - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (\text{E.8})$$

Il convient de noter ici une simplification importante de cette équation, avec les hypothèses suivantes :

- pour un gaz parfait ou un liquide incompressible $dh = c_p dT$,
- le flux de chaleur conductif est donné par la loi de Fourier $\mathbf{q} = -\lambda \mathbf{grad} T$.

L'équation (E.8) s'écrit alors :

$$\frac{\partial (\rho c_p T)}{\partial t} = - \operatorname{div} (\rho c_p T \mathbf{v} - \lambda \mathbf{grad} T) + \frac{Dp}{Dt} + \phi_v. \quad (\text{E.9})$$

L'expression à l'intérieur de l'opérateur div contient deux flux : le flux convectif $\rho c_p T \mathbf{v}$ et le flux conductif $-\lambda \mathbf{grad} T$. Le terme en DP/Dt est négligeable lorsque les variations spatiales et temporelles de la pression sont faibles, c'est souvent le cas pour des liquides. La puissance des forces intérieures ϕ_v est souvent négligeable pour les gaz, et également dans de nombreux cas pour les liquides. C'est en revanche ce terme qui produit un échauffement du fluide dans les écoulements de lubrification.

La conductivité thermique peut être sortie de l'opérateur divergence si les variations de température au sein de l'écoulement sont faibles. En effet, en général λ varie avec T , et il augmente notablement pour les gaz chauds.

On notera enfin que si la vitesse est nulle (fluide au repos ou solide), \mathbf{v} , ϕ_v et DP/Dt sont identiquement nuls, et on retrouve l'équation de la chaleur :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T. \quad (\text{E.10})$$

Références bibliographiques

- R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot. *Transport phenomena*. John Wiley and sons, 1960.
- S. Candel. *Mécanique des fluides*. Dunod, 1995.
- P. Chassaing. *Mécanique des fluides. Eléments d'un premier parcours*. Cepaduès, 2000.
- E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences/CNRS Editions, 2001.
- I. E. Idelcik. *Memento des pertes de charge : Coefficients de pertes de charge singulieres et de pertes de charge par frottement*. Eyrolles, 1969.
- F. M. White. *Fluid Mechanics*. Mc Graw-Hill, 1994.